در هر حالت، باید ثابت کنیم که معادله برقرار است.
برای فهم بهتر، یکی دو مورد را اثبات می‌کنیم و پس از ایده گرفتن، قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم.

$$0 \le p < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \le np < 1 \Rightarrow [np] = 0$$
$$\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + 0 = nk$$
$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$
$$= k + \left[k + p + \frac{1}{n}\right] + \left[k + p + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-1}{n}\right]$$
$$= nk + \left[p + \frac{1}{n}\right] + \left[p + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-1}{n}\right]$$
$$= nk + 0 + 0 + \dots + 0 = nk$$

زیرا هر یک از جزء صحیح‌ها صفر است.
ببینید:

$$0 \le p < \frac{1}{n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \le p + \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{1}{n}\right] = 0 \\ \frac{2}{n} \le p + \frac{2}{n} < \frac{3}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{2}{n}\right] = 0 \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \le p + \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow \left[p + \frac{n-1}{n}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \le p < \frac{2}{n} \Rightarrow 1 \le np < 2 \Rightarrow [np] = 1$$
$$\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + 1$$
$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$
$$= k + \left[k + p + \frac{1}{n}\right] + \left[k + p + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-1}{n}\right].$$
$$= nk + \left[p + \frac{1}{n}\right] + \left[p + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-1}{n}\right]$$
$$= nk + 0 + 0 + \dots + 0 = nk + 1$$

باز هم، همه به جز یکی از جزء صحیح‌ها، صفر و آخری یک است.

$$\frac{1}{n} \le p < \frac{2}{n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{n} \le p + \frac{1}{n} < \frac{3}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{1}{n}\right] = 0 \\ \frac{3}{n} \le p + \frac{2}{n} < \frac{4}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{2}{n}\right] = 0 \\ \vdots \\ 1 = \frac{n}{n} \le p + \frac{n-1}{n} < \frac{n+1}{n} = 1/1 \\ \qquad \Rightarrow \left[p + \frac{n-1}{n}\right] = 1 \end{cases}$$

در حالت کلی، یعنی برای $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ و $\frac{i}{n} \le p < \frac{i+1}{n}$ نشان می‌دهیم که رابطه برقرار است:

$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+1}{n} \Rightarrow i \le np < i + 1 \Rightarrow [np] = i$$
$$\Rightarrow [nx] = [nk + np] = nk + i$$
$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$
$$= k + \left[k + p + \frac{1}{n}\right] + \left[k + p + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-i-1}{n}\right]$$
$$+ \underbrace{\left[k + p + \frac{n-i}{n}\right] + \dots + \left[k + p + \frac{n-2}{n}\right] + \left[k + p + \frac{n-1}{n}\right]}_{i}$$
$$= nk + \underbrace{\left[p + \frac{1}{n}\right] + \left[p + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-i-1}{n}\right]}_{(n-i) \times 0}$$
$$+ \underbrace{\left[p + \frac{n-i}{n}\right] + \dots + \left[p + \frac{n-2}{n}\right] + \left[p + \frac{n-1}{n}\right]}_{i \times 1}$$
$$= nk + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{(n-i)} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{i} = nk + i$$

$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+1}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{n-i}{n}\right] = 1$$
$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+1}{n} \Rightarrow \frac{i}{n} + \frac{n-i}{n} \le p + \frac{n-i}{n} < \frac{i+1}{n} + \frac{n-i}{n}$$
$$\Rightarrow 1 \le p + \frac{n-i}{n} < \frac{n+1}{n} = 1 + \delta$$
$$\Rightarrow \left[p + \frac{n-i}{n}\right] = 1$$

به همین ترتیب داریم:

$$\left[p + \frac{n-i-1}{n}\right] = 0$$

زیرا:

$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+1}{n} \Rightarrow \left[p + \frac{n-i-1}{n}\right] = 0$$
$$\frac{i}{n} \le p < \frac{i+1}{n} \Rightarrow \frac{i}{n} + \frac{n-i-1}{n} \le p + \frac{n-i-1}{n}$$
$$< \frac{i+1}{n} + \frac{n-i-1}{n} \Rightarrow \frac{n-1}{n} \le p + \frac{n-i-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$
$$\Rightarrow \left[p + \frac{n-i-1}{n}\right] = 0$$