اثبات دو قضیه از تقارن به کمک نگاشت‌ها

برای دانش آموزان سال سوم

حمید رشتی‌زاده
دبیر ریاضی شهرستان‌های استان تهران

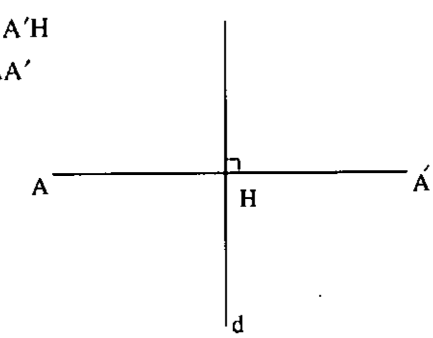
مقدمه

نگاشت‌ها در دورهٔ آموزشی متوسطه، از اهمیت زیادی برخوردارند وآموزش بخشی از هندسه به کمک نگاشت‌ها، از هندسه دیدگاهی تحلیلی را ارائه می‌دهد. آن‌چه در این مقاله مطالعه می‌کنید، اثبات دو قضیه از نگاشت‌هاست که در بیشتر کتب هندسی، به صورت سنّتی اثبات می‌شوند و سعی بر آن شده که با استفاده از مطالب آموزشی که در کتاب هندسهٔ (۲) ارائه شده است، ثابت شوند.

تعریف ۱. خط ثابت d را در صفحه در نظر گرفته، نقطهٔ A' را تصویر نقطهٔ A نسبت به خط d می‌نامند؛ هرگاه:

۱) $AH = A'H$

۲) $d \perp AA'$



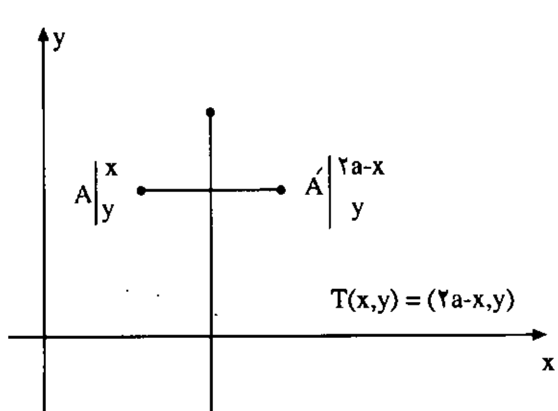
خط d را محور تقارن (بازتاب) و نقاط A و A' را تصویر یکدیگر نسبت به این محور و این تقارن را تقارن محوری می‌نامند.

فرض کنیم $a \in R$ و خط d به معادله $x = a$ باشند. در این صورت، با محاسباتی ساده، در می‌یابیم که تصویر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به خط d عبارت است از: $A'\left|\begin{matrix}2a-x\\y\end{matrix}\right.$ (۱).

در این صورت، اگر T نگاشت مورد نظر ما باشد، آن‌گاه ضابطهٔ آن به صورت:

$$T(x,y) = (2a - x, y)$$

خواهد بود.



به روش مشابهی، می‌توان نشان داد که اگر خط d به معادله $y=b$ باشد، آن‌گاه تصویر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به d نقطهٔ $A''\left|\begin{matrix}x\\2b-y\end{matrix}\right.$ (۲) خواهد بود و اگر T' نگاشت این بازتاب باشد، داریم:

$$T'(x,y)=(x,2b-y)$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که اگر d به معادلهٔ $y=ax+b$ باشد، قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به d چیست؟

برای پاسخ به این سؤال، فرض کنیم که $A'\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ نقطهٔ مورد نظر باشد، آن‌گاه باید دو مورد را در نظر بگیریم.

۱. اگر M وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه مختصات M باید در معادلهٔ d صدق کند؛ درنتیجه:

$$M\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(x+\alpha)\\\frac{1}{2}(y+\beta)\end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{1}{2}(y+\beta)=\frac{a}{2}(x+\alpha)+b$$

$$\Rightarrow y+\beta=a(x+\alpha)+2b$$

$$\Rightarrow a\alpha-\beta=y-ax-2b \qquad (۳)$$

۲. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم که شیب پاره‌خط AA'، m باشد، آن‌گاه $ma=-1$ خواهد بود یا:

(۴)

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha}\Rightarrow ay-a\beta=\alpha-x\Rightarrow \alpha+a\beta=ay+x$$

با قرار دادن روابط (۳) و (۴) در یک دستگاه و حل آن، به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=\frac{1}{1+a^2}\left[2ay+(1-a^2)x-2ab\right]$$

و

$$\beta=\frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y+2ax+2b\right]$$

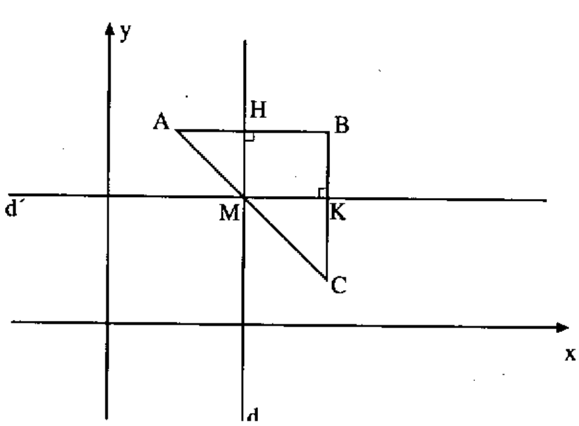
لذا مختصات نقطهٔ A' مشخص خواهد شد. حال اگر نگاشت متناظر با این تقارن را با F نمایش دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{1+a^2}\left[2ay+(1-a^2)x-2ab\right],\ \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y+2ax+2b\right]\right) \qquad (۵)$$

تعریف ۲. فرض کنیم که M نقطهٔ ثابتی در صفحه باشد. نقطهٔ A' را تصویر نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M می‌نامند؛ هرگاه $AM=A'M$.

نقطهٔ M را مرکز تقارن و نقاط A و A' را تصاویر یکدیگر نسبت به نقطهٔ M در این تقارن مرکزی می‌نامند.

فرض کنیم $M\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن و $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نقطه‌ای در صفحه باشد. خطوط d و d' را به معادلات $x=x_1$ و $y=y_1$ رسم می‌کنیم. اگر تصویر A را نسبت به d، B و تصویر B را نسبت به d'، C بنامیم، از برابری دو مثلث $\overset{\triangle}{AHM}$ و $\overset{\triangle}{CMK}$، نتیجه می‌شود که $AM=CM$، لذا طبق تعریف (۲) اگر M را به‌عنوان مرکز تقارن در نظر بگیریم، آن‌گاه نقطهٔ C همان نقطهٔ A' خواهد بود.



با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان دریافت که باید $B\left|\begin{matrix}2x_1-x\\y\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}2x_1-x\\2y_1-y\end{matrix}\right.$ باشند و درنتیجه، نگاشت تقارن مرکزی نسبت به نقطهٔ M عبارت است از:

$$D(x,y)=(2x_1-x,\ 2y_1-y) \qquad (۶)$$

قضیهٔ ۱. ترکیب دو تقارن محوری با محور تقارن‌های موازی، یک انتقال است و اگر فاصلهٔ این دو محور تقارن را با h نمایش دهیم، طول بردار انتقال حاصل برابر ۲h خواهد بود.

برهان. حالت اول: اگر دو خط موازی محور عرض‌ها باشند، آن‌گاه معادلاتی به شکل $d: x = x_1$ و $d': x = x_2$ خواهند داشت. درنتیجه، اگر T نگاشت تقارن نسبت به d و T′ نگاشت تقارن نسبت به d′ باشند، آن‌گاه:

$$T'oT(x,y) = T'(T(x,y)) = T'(2x_1 - x, y) = (x + 2(x_2 - x_1), y)$$ ،

که به‌وضوع این نگاشت، یک انتقال با بردار $\vec{V} = (2x_2 - 2x_1 \; , \; 0)$ است و با توجه به این که فاصلهٔ بین این دو خط برابر $h = |x_2 - x_1|$ است، دیده می‌شود که $\|\vec{V}\| = 2h$.

حالت دوم: فرض کنیم که دو خط d و d′ به ترتیب به معادلات $y = ax + b$ و $y = ax + b'$ موازی یکدیگر باشند. در این صورت، فاصلهٔ بین این دو خط عبارت است از $h = \frac{|b - b'|}{\sqrt{1 + a^2}}$. اکنون اگر باز هم T نگاشت تقارن نسبت به d و T′ نگاشت تقارن نسبت به d′ باشد، آن‌گاه برای نقطه‌ای مانند A در صفحه داریم $T(A) = A'$ و $T'(A') = A''$؛ ولی طبق رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید:

$$T(A) = T(x,y) = \left(\frac{1}{1+a^2}\left[2ay + (1-a^2)x - 2ab\right] , \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y + 2ax + 2b\right]\right) = A' = (x', y')$$

و همچنین $T'(A') = A'' = (x'', y'')$ که در آن

$$x'' = \frac{1}{1+a^2}\left[2ay' + (1-a^2)x' - 2ab'\right]$$

و

$$y'' = \frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y' + 2ax' + 2b'\right]$$

که پس از ساده شدن داریم:

$$\begin{cases} x'' = x + \dfrac{2a(b-b')}{1+a^2} \\ y'' = y + \dfrac{2(b'-b)}{1+a^2} \end{cases}$$

و در نتیجه

$$T'oT(x,y) = \left(x + \frac{2a(b-b')}{1+a^2} , \; y + \frac{2(b'-b)}{1+a^2}\right) = G(x,y) .$$

با توجه به ضابطهٔ G درمی‌یابیم که G یک انتقال است و بردار $\vec{V} = \left(\frac{2a(b-b')}{1+a^2} \; , \; \frac{2(b'-b)}{1+a^2}\right)$ بردار انتقال آن خواهد بود و $\|\vec{V}\| = \frac{2|b-b'|}{\sqrt{1+a^2}} = 2h$.

قضیهٔ ۲. ترکیب دو تقارن محوری با محور تقارن‌های متقاطع یک دوران است و زاویهٔ دوران، برابر است با دو برابر زاویه بین دو محور تقارن.

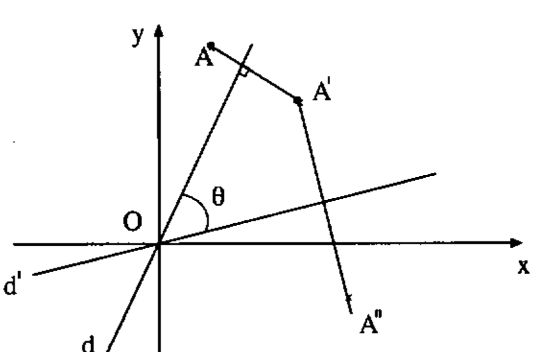
برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که دو محور یکدیگر را در مبدأ مختصات قطع می‌کنند. درنتیجه، محورهای تقارن d و d′ به ترتیب معادلاتی به صورت $y = ax$ و $y = a'x$ خواهند داشت $(a \neq a')$.

اگر T و T′ نگاشت‌های متناظر با این دو تقارن باشند، آن‌گاه:

$$T'(A') = T'(x', y') = A'' = (x'', y'') \; ,$$
$$T(A) = T(x,y) = A' = (x', y')$$

$$T(x,y) = \left(\frac{1}{1+a^2}(2ay + (1-a^2)x), \frac{1}{1+a^2}((a^2-1)y + 2ax)\right) = (x', y')$$

$$T'(x', y') = \left(\frac{1}{1+a'^2}(2a'y' + (1-a'^2)x') \; , \; \frac{1}{1+a'^2}((a'^2-1)y' + 2a'x')\right) = (x'', y'')$$



که در آن

$$x'' = \frac{1}{1+a'^2}\left[\frac{2a'}{1+a^2}((a^2-1)y+2ax)+\frac{(1-a'^2)}{1+a^2}(2ay+(1-a^2)x)\right]$$

و پس از محاسبات با فرض

$$\begin{cases} m = \dfrac{(1-a^2)(1-a'^2)+4aa'}{(1+a^2)(1+a'^2)} \\ n = \dfrac{2(a-a'+aa'^2-a'a^2)}{(1+a^2)(1+a'^2)} \end{cases}$$

، خواهیم داشت:

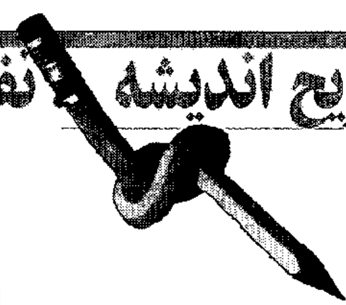
$x'' = mx - ny$ و همچنین $y'' = nx - my$.

اکنون اگر زاویه بین دو محور تقارن را θ در نظر بگیریم، آن‌گاه $\tan\theta = \dfrac{a-a'}{1+aa'}$ خواهد بود. در نتیجه به کمک محاسبات، مثلثاتی به‌دست می‌آید که $\cos 2\theta = m$ و $\sin 2\theta = n$ و ضابطهٔ ترکیب این دو نگاشت به صورت مقابل

$$T'oT(x,y) = (x.\cos 2\theta - y.\sin 2\theta \ , \ x.\sin 2\theta + y.\cos 2\theta)$$

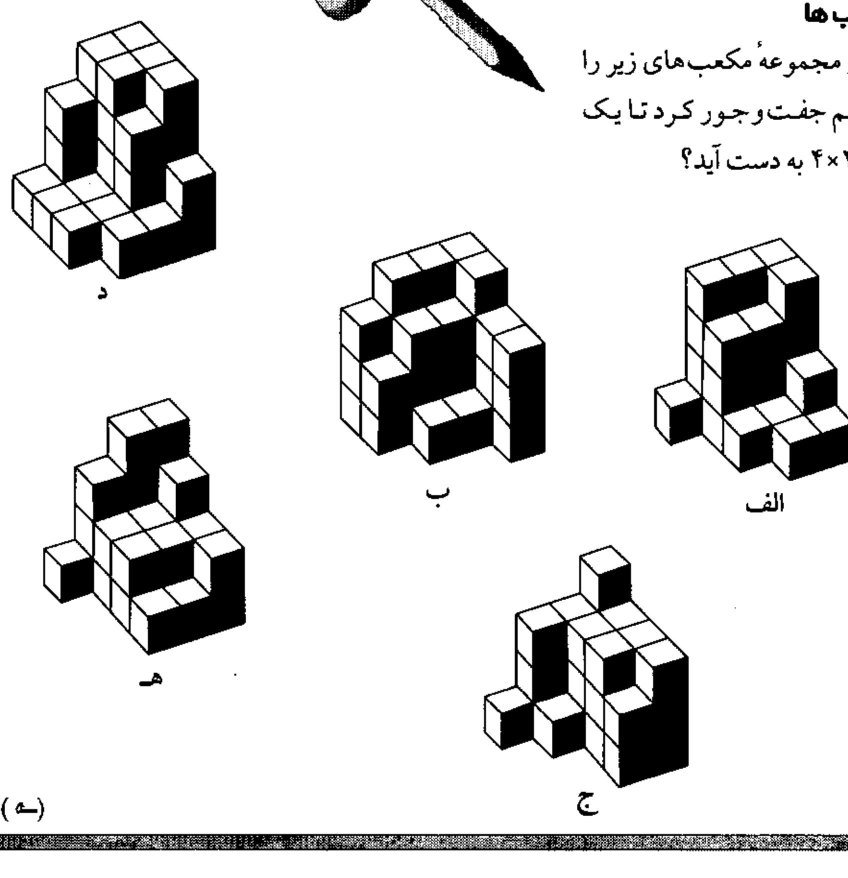
خواهد بود. همین‌طور که ضابطهٔ ترکیب این دو نگاشت نشان می‌دهد، ترکیب آن‌ها یک دوران با زاویهٔ دوران 2θ است. در ادامه اگر d و d' در نقطه‌ای به غیر از مبدأ، همدیگر را قطع کنند، با انتقال مبدأ مختصات به نقطهٔ برخورد دو محور، می‌توان قضیه را به همین شکل اثبات کرد. همچنین اگر یکی از دو محور موازی محور عرض‌ها باشد، می‌توان در جای خود از ضابطهٔ نگاشت آن استفاده کرد.

تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...



پازل مکعب‌ها

کدام دو مجموعهٔ مکعب‌های زیر را می‌توان با هم جفت‌وجور کرد تا یک مکعب $4 \times 4 \times 4$ به دست آید؟



پاسخ: (ب) و (هـ)