اتحاد و معادله (۱۴)

مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله

● پرویز شهریاری

اشاره:

در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه یک چندجمله‌ای دلخواه بحث شد، اینک در پی آن مسئله‌های گوناگونی را درباره‌ی معادله‌ها می‌آوریم:

۱) $(m^2-n^2)\sin x-2m\cos x=(m^2+n^2)\cos\frac{x}{3}$ با شرط $m^2+n^2\neq 0$.

حل: شرط $m^2+n^2\neq 0$ به معنای آن است که m و n، هیچ‌کدام برابر صفر نیستند. دو طرف معادله را بر m^2+n^2 بخش می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\sin\alpha$ به سادگی روشن می‌شود که $\frac{2m}{m^2+n^2}=\cos\alpha$ است. معادله به این صورت درمی‌آید: $\sin x\sin\alpha-\cos x\cos\alpha=\cos\frac{x}{3}$

که چنین می‌شود: $\cos(x+\alpha)=\cos(\pi-\frac{x}{3})$

از آن جا، جواب‌های کلی x به دست می‌آید:

$$x=\frac{3}{2}k\pi+(\frac{3\pi}{4}-\frac{3\alpha}{4})$$

$$x=3k\pi+(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\alpha}{2})$$

α، کمانی است بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ که سینوس آن برابر $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ است.

۲) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

حل: دو طرف معادله را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1$$

باید توجه داشته باشیم که ضمن عبور از معادله‌ی اصلی به این معادله، ممکن است جواب اضافی وارد معادله شود که باید آخر کار آزمایش شود. به جای مقدار پرانتز در معادله‌ای که به دست آوردیم، بنا به فرض مسئله می‌توان مقدار آن، یعنی عدد ۱، را قرار داد:

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x \qquad (1)$$

اگر یک‌بار دیگر دو طرف را به توان ۳ برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3 \qquad (2)$$

معادله‌ی (۲) به صورت $x^2(1-x)=0$ درمی‌آید که جواب‌های آن، یعنی ۰ و ۱، در معادله‌ی (۲) و هم‌ارز آن، معادله‌ی (۱)، صدق می‌کند؛ در حالی که معادله‌ی اصلی تنها جواب $x=1$ را می‌پذیرد.

۳) با شرط $ab^2+1=0$ و $abc\neq 0$، این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{a}+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{c}=bc$$

حل: در معادله به جای a، مقدارش $-\frac{1}{b^2}$ را قرار می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$-b^2x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{c}=bc$$

مخرج‌ها را از بین می‌بریم (فرض بر این است که a، b و c برابر صفر نیستند):

$$bx^3+cx^2-b^3cx-b^2c^2=0$$

که با اندکی توجه، به این صورت تجزیه می‌شود:

$$(x^2 - b^2c)(bx + c) = 0$$

پاسخ. $x_1 = -\frac{c}{b}$ ، $x_2 = b\sqrt{c}$ ، $x_3 = -b\sqrt{c}$.

۴. معادله‌ی $\cos f(x)\left(1 - \frac{\sin^2 f(x)}{m}\right) = 1$ را برای $m > 0$ حل کنید.

حل: معادله به ترتیب به این صورت درمی‌آید:

$$\cos f(x)(m - \sin^2 f(x)) = m;$$

$$m(1 - \cos f(x)) + \cos f(x)\sin^2 f(x) = 0;$$

$$2m\sin^2\frac{f(x)}{2} + 4\sin^2\frac{f(x)}{2}\cos^2\frac{f(x)}{2}\cos f(x) = 0;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}\left[m + (1 + \cos f(x))\cos f(x)\right] = 0;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}\left[\cos^2 f(x) + \cos f(x) + m\right] = 0;$$

$$1)\ \sin\frac{f(x)}{2} = 0 \Rightarrow f(x) - 2k\pi = 0$$

که یک معادله‌ی جبری است و جواب‌های آن، به شرط درست بودن عدد k، جواب معادله‌ی مفروض است.

$$2)\ \cos^2 f(x) + \cos f(x) + m = 0$$

$$\Rightarrow \cos f(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$$

$$f(x) = 2k\pi \pm \arccos\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2} \qquad (1)$$

این معادله وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$1 - 4m \geq 0\ ,\ -1 \leq \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2} \leq 1$$

از نامعادله‌ی اول به دست می‌آید: $m \leq \frac{1}{4}$ و با توجه به مثبت بودن m، نامعادله‌های دوم همیشه برقرار است، زیرا داریم:

$$a)\ -1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} \leq 1\ ;\ -2 \leq -1 - \sqrt{1 - 4m} \leq 2;$$

$$-1 \leq -\sqrt{1 - 4m} \leq 3; \sqrt{1 - 4m} \leq 1\ ;\ 1 - 4m \leq 1\ ;\ m \geq 0$$

$$b)\ -1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{2} \leq 1\ ;\ -2 \leq \sqrt{1 - 4m} \leq 3;$$

$$\sqrt{1 - 4m} \leq 3\ ;\ 1 - 4m \leq 9\ ;\ 4m \geq -8\ ;\ m \geq -2$$

بنابراین، اگر $0 < m \leq \frac{1}{4}$ باشد، معادله‌ی (۱) وجود دارد و جواب‌های آن جواب‌های معادله‌ی مفروض هستند (k را باید عددی درست گرفت).

۵. عددی سه رقمی را پیدا کنید که در این رابطه صدق کند (مبنای عدد را ده بگیرید): $\overline{abc} = abc(a + b + c)$

حل: رابطه‌ی فرض را می‌توان این طور نوشت:

$$100a + 10b + c = abc(a + b + c)$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$9(11a + b) = (a + b + c)(abc - 1) \qquad (1)$$

که در آن، a، b و c رقم‌هایی هستند بین ۰ و ۱۰. اگر هر کدام از عددهای $a + b + c$ و $abc - 1$ مضربی از ۳ باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۹ بخش‌پذیر می‌شود، ولی اگر همه‌ی حالت‌های ممکن را آزمایش کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که هر سه رقم a، b و c باید در تقسیم بر ۳، باقی مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند که در این صورت $11a + b$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود و در نتیجه، سمت چپ رابطه‌ی (۱) مضربی از ۲۷ خواهد بود. بنابراین، باید یکی از دو عدد $a + b + c$ یا $abc - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند.

اگر $a + b + c > 17$ ، آن‌گاه:

$$abc > 72\ ,\ abc(a + b + c) > 1000$$

یعنی عدد چهاررقمی می‌شود. بنابراین، اگر $a + b + c$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$a + b + c = 9\ ,\ 11a + b = abc - 1$$

در این حالت، بنا به رابطه‌ی بین واسطه‌ی حسابی با واسطه‌ی هندسی، باید داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = 3\ ,\ abc \leq 27$$

و a برابر است با ۲ یا ۱. در غیر این صورت:

$$abc = 11a + b + 1 > 27$$

اگر $a = 2$ ، آن‌وقت به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} b + c = 7 \\ 2bc = b + 23 \end{cases}$$

که جواب درست ندارد. بنابراین $a = 1$. با حل دستگاهی که به این ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ 11 + b = bc - 1 \end{cases}$$

دو جواب برای مسئله حاصل می‌شود: ۱۳۵ و ۱۴۴.

به حالتی می‌پردازیم که در آن $abc - 1$ مضربی از ۹ باشد. اگر $abc - 1 = 9$ ، آن‌وقت از رابطه‌ی (۱) به‌دست می‌آید: $c = 10a$ که ممکن نیست. حالت‌هایی هم که $abc - 1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ و ۹۰ باشد، ممکن نیست، زیرا abc شامل عامل اولی بزرگ‌تر از ۱۰ می‌شود.

اگر $abc - 1 = 27$ ، آن‌وقت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 8a = 2b + 3c \\ abc = 28 \end{cases}$$

که جواب مطلوبی برای ما ندارد.

اگر $abc - 1 = 63$ ، آن‌وقت به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 4a = 6b + 7c \\ abc = 64 \end{cases}$$

که باز هم جوابی برای مسئله‌ی ما ندارد. سرانجام باید فرض کنیم: $abc - 1 - 1 = 91\ (l > 10)$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$11a + b < l(a + b + c)$$

به این‌ترتیب، مسئله همان دو جواب را دارد: ۱۳۵ و ۱۴۴.

۶. x، y و z را در این دستگاه حذف کنید (رابطه‌ای بین a، b، c و d پیدا کنید):

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \sin z - \sin(x + y + z) = c \\ \cos z + \cos(x + y + z) = d \end{cases}$$

حل: اگر $ad + bc$ را محاسبه کنیم، حاصل برابر صفر می‌شود:

$$ad + bc = 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\times\cos\frac{x+y+2z}{2}\cos\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\times\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 0$$

۷. این معادله را حل کنید (معادله‌ی دکارت):

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

حل: عبارت سمت چپ برابری را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0;$$

$$x^3(x - 4) - 19x(x - 4) + 30(x - 4) = 0;$$

$$(x - 4)(x^3 - 19x + 30) = 0;$$

$$(x - 4)(x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30) = 0;$$

$$(x - 4)(x - 3)(x^2 + 3x - 10) = 0$$

پاسخ: $x_1 = 4$ ، $x_2 = 3$ ، $x_3 = 2$ ، $x_4 = -5$.

۸. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt[5]{\frac{a + x}{a}} + \sqrt[5]{\frac{a + x}{b}} = \sqrt[5]{\frac{x}{ab}}$$

حل: معادله‌ی مفروض به این صورت در می‌آید:

$$\sqrt[5]{a + x}(\sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{a}) = \sqrt[5]{x}$$

دو طرف را به توان ۵ می‌رسانیم:

$$(a + x)(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5 = x$$

پاسخ: $x = \dfrac{a(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5}{1 - (\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5}$.

۹. این دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \end{cases}$$

حل: معادله‌ی دوم دستگاه را از مجذور معادله‌ی اول کم می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$xy + xz + yz = 9 \qquad (1)$$

اکنون معادله‌ی اول را از مجذور معادله‌ی سوم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5 \qquad (2)$$

حال اگر معادله‌ی (۱) را از مجذور معادله‌ی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})\sqrt{xyz} = 8$$

که با توجه به معادله‌ی سوم دستگاه، چنین می‌شود:

$$\sqrt{xyz} = 2 \Rightarrow xyz = 4$$

اکنون به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 9 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

یعنی x، y و z ریشه‌های این معادله‌ی درجه سوم هستند:

$$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$$

با توجه به مجموع ضریب‌های این معادله که برابر صفر شده است، یکی از ریشه‌های آن برابر است با ۱ و عبارت سمت چپ برابری بر $t - 1$ بخش‌پذیر است. خارج قسمت درجه‌ی دوم می‌شود و ریشه‌های ۱ و ۴ دارد. بنابراین، جواب‌های معادله‌ی مفروض چنین هستند:

$$\begin{vmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 4 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_3 = 4 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 1 \end{vmatrix}$$

۱۰. معادله‌ی $\sin ax \sin bx = \sin mx \sin nx$ را حل کنید،

به شرط این‌که a، b، m و n جمله‌های پشت سر هم یک تصاعد حسابی صعودی باشند.

حل: قدرنسبت تصاعد حسابی را $d > ۰$ فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} b = a + d, \\ m = a + ۲d, \\ n = a + ۳d \end{cases}$$

اگر به جای b، m و n مقدارهایشان را قرار دهیم و از این رابطه‌ها استفاده کنیم:

$$\sin ax \sin(a+d)x = \frac{۱}{۲}[\cos dx - \cos(۲a+d)x]$$

$$\sin(a+۲d)x \sin(a+۳d)x = \frac{۱}{۲}[\cos dx - \cos(۲a+۵d)x]$$

معادله‌ی مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$\cos(۲a+d)x - \cos(۲a+۵d)x = ۰$$

که با تبدیل به مجموع، چنین می‌شود:

$$\sin(۲a+۳d)x . \sin ۲dx = ۰$$

و از آن‌جا

$$\sin(۲a+۳d)x = ۰ \Rightarrow (۲a+۳d)x = k\pi$$

$$\sin ۲dx = ۰ \Rightarrow ۲dx = k\pi$$

پاسخ:

$x = \frac{k}{۲d}\pi, x = \frac{k}{b+m}\pi$ (زیرا $۲a + ۳d = b + m$).

۱۱. این معادله را حل کنید:

$\tan(\pi \tan x) - \cot(\pi \cot x) = ۰$.

حل: معادله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\tan(\pi \tan x) = \tan(\frac{\pi}{۲} - \pi \cot x) \quad (۱)$$

می‌دانیم شرط لازم و کافی برای این‌که داشته باشیم: $\cot x = \cot y$ یا $\tan x = \tan y$ این است که $x - y = k\pi$ باشد. بنابراین از معادله‌ی (۱) به دست می‌آید:

$$\pi \tan x - \frac{\pi}{۲} + \pi \cot x = k\pi \quad (۲)$$

یعنی $\tan^۲ x(۲k+۱)\tan x + ۲ = ۰$. از آن‌جا:

$$\tan x = \frac{۲k+۱ \pm \sqrt{(۲k+۱)^۲ - ۱۶}}{۴} \quad (۳)$$

به سادگی دیده می‌شود که معادله‌های (۱) و (۲) هم‌ارز نیستند، زیرا برای نمونه، اگر معادله‌ی (۲) برای مقدارهایی از

$$\tan x = \frac{۱}{۲}(۲k+۱) \quad (۴)$$

صادق باشد (k عددی است درست)، این مقدارها در معادله‌ی (۱) صدق نمی‌کنند، زیرا برای این مقدارها، $\tan(\pi \tan x)$ مفهوم خود را از دست می‌دهد. بنابراین، پاسخ‌هایی از معادله‌ی (۲) که به صورت (۴) باشد، باید از این پاسخ‌ها کنار بروند. بنابه رابطه‌ی (۳)، وقتی tanx وجود دارد که نابرابری $(۲k+۱)^۲ - ۱۶ \geq ۰$ برقرار باشد. بنابراین، باید مقدارهایی از k را که برابر $۰, \pm۱, \pm۲$ هستند، از بین پاسخ‌ها کنار زد. به جز این، اگر tanx بخواهد به صورت (۴) باشد، باید پیش از همه، مقدار زیر رادیکال در رابطه‌ی (۳) مربع کامل باشد:

$$۲k + ۱ = y ; (۲k+۱)^۲ - ۱۶ = z^۲$$

(z، عددی است درست)، و به دست می‌آید:

$$y^۲ - ۱۶ = z^۲ \Rightarrow (y-z)(y+z) = ۱۶ \quad (۵)$$

برای حل این معادله که معادله‌ای سیال و شامل دو مجهول

با مقدارهای درست است، فرض می‌کنیم:

$$y - z = u, y + z = v \qquad (*)$$

که معادله‌ی (۵) را به این صورت درمی‌آورد:

$$u.v = 16 \qquad (6)$$

وقتی y و z عددهایی درست هستند، u و v هم عددهایی درست خواهند بود و برای آن‌ها، این پاسخ‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} u_{1,2} = \pm 2 \\ v_{1,2} = \pm 8 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_{3,4} = \pm 8 \\ v_{3,4} = \pm 2 \end{vmatrix}$$

با حل دستگاه (*) به دست می‌آید: $y = \frac{u + v}{2}$

که با توجه به این که عدد $y = 2k + 1$، عددی است فرد، داریم: $y = \pm 5$

برای $y = 5$ به دست می‌آید: $k = 2$ و برای $y = -5$ داریم: $k = -3$.

از رابطه‌ی (۳) برای $k = 2$ به دست می‌آید:

$$\tan x = 2, \tan x = \frac{1}{2}$$

و برای $k = -2$:

$$\tan x = -2, \tan x = -\frac{1}{2}$$

پاسخ‌های $\tan x = \pm\frac{1}{2}$ در معادله‌ی مفروض صدق نمی‌کند، ولی پاسخ‌های $\tan x = \pm 2$ در آن صدق می‌کند. رابطه‌های (۳) و (۷) پاسخ‌های مسأله را می‌دهند:

$$x = m\pi + \operatorname{Arc\,tan} \frac{2k + 1 \pm \sqrt{(2k + 1)^2 - 16}}{4}$$

$$x = n\pi \pm \operatorname{Arc\,tan} 2$$

که در آن‌ها m و n عددهایی درست و k برابر $\pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$ است.

۱۲. این دستگاه را به ازای $n < 1$ حل کنید.

$$\begin{cases} \tan\frac{x}{2} + \tan\frac{y}{2} = m \\ 1 + n\cos y = \dfrac{1 - n^2}{1 - n\cos x} \end{cases}$$

حل: معادله‌ی دوم دستگاه را تبدیل می‌کنیم:

$$n\cos y = \frac{-1 + n\cos x + 1 - n^2}{1 - n\cos x} = \frac{n\cos x - n^2}{1 - n\cos x}$$

از آن‌جا: $\frac{\cos y}{1} = \frac{\cos x - n}{1 - n\cos x}$

در دو طرف، در صورت، «تفضیل نسبت» و در مخرج، «ترکیب نسبت» می‌کنیم:

$$\frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} = \frac{(1 + n) - (1 + n)\cos x}{(1 - n) + (1 - n)\cos x} = \frac{1 + n}{1 - n} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} ;$$

که به این صورت درمی‌آید:

$$\tan^2\frac{y}{2} = \frac{1 + n}{1 - n}\tan^2\frac{x}{2}$$

و درنتیجه:

$$\tan\frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + m}{1 - m}}\tan\frac{x}{2}$$

و دیگر به یاری معادله‌ی اول دستگاه، $\tan\frac{x}{2}$ و $\tan\frac{y}{2}$ و درنتیجه x و y به دست می‌آید.

پاسخ: با شرط $n < 1$:

$$\begin{vmatrix} x = 2\left[k\pi + \operatorname{Arc\,tan}\frac{m}{2n}(n - 1 \pm \sqrt{1 - n^2})\right] \\ y = 2\left[k\pi + \operatorname{Arc\,tan}\frac{m}{2n}(n + 1 \mp \sqrt{1 - n^2})\right] \end{vmatrix}$$