تجزیه ی چند جمله ای های دلخواه

• پرویز شهریاری

فرض کنید قاعده‌ای برای مقایسه‌ی چندجمله‌ای f با چندجمله‌ای دیگر *f داده باشند. این قاعده را هم‌ریختی ضرب می‌نامیم، به شرطی که $f \to f^*$ یک به یک باشد (یعنی از $f^* = g^*$، نتیجه شود $f = g$)، و اگر هر بار که این برابری برقرار باشد: $f = gh$، این برابری هم درست باشد: $f^* = g^*h^*$.

در ضمن، اگر برای هر چندجمله‌ی f و چندجمله‌ای‌های g' و h' که دارای همان ویژگی باشند: $f^{\circ} = g'h'$، چندجمله‌ای‌های g و h وجود داشته باشند؛ به نحوی که: $f = gh$، و $h^* = h'$ و $g^{\circ} = g'$.

روشن است، هرگاه به ما یک هم‌ریختی ضرب داده باشند،

مسئله‌ی مربوط به تجزیه‌ی چندجمله‌ای f به صورت عامل‌های خود، به طور کامل هم‌ارز تجزیه‌ی چندجمله‌ای f به صورت ضرب عامل‌ها خواهد بود.

مثال: برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه‌ی n، فرض می‌کنیم:

$$f^*(x) = (-1)^n f(-x) \qquad (1)$$

روشن است که تناظر $f \to f^*$، یک هم‌ریختی ضرب است. اگر چندجمله‌ای f دارای علامت‌های متناوب باشد، آن‌وقت چندجمله‌ای f^* یک چندجمله‌ای مثبت می‌شود. بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان به مسئله‌ای رسید که تجزیه‌ی چندجمله‌ای را به مسئله‌ی «یاکوکین» که در شماره‌ی قبل آن را حل کردیم، یعنی مسئله‌ی چندجمله‌ای مثبت برساند.

گاهی بهتر است، از هم‌ریختی ضرب نه در تمامی چندجمله‌ای، بلکه تنها در زیرمجموعه‌ی M آن استفاده کنیم. در این مورد لازم است، به جای مجموعه‌ی f، مجموعه‌ی M را به کار گیریم که شامل همه‌ی بخشیاب‌های این چندجمله‌ای است.

مثال: فرض کنید M_n، مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌هایی باشد که درجه‌ی آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند و مقدار ثابت آن‌ها مخالف صفر است. به هر چندجمله‌ای زیر:

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

از این مجموعه، چندجمله‌ای f^* را نسبت می‌دهیم که همان ضریب‌ها را داشته باشد، ولی در جهت عکس. یعنی چندجمله‌ای که با این دستور معین شده باشد:

$$f^* = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

به سادگی دیده می‌شود: $f^*(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ که به روشنی $f \to f^*$ را نتیجه می‌دهد، عبارت است از یک هم‌ریختی ضرب.

برای نمونه، این چندجمله‌ای را درنظر می‌گیریم:

$$f(x) = 7x^6 + x^5 + 4x^4 + 7x + 6$$

به‌کارگیری مستقیم روش «یاکوکین» درباره‌ی این چندجمله‌ای، به محاسبه‌ای کم و بیش طولانی نیاز دارد. ولی اگر به چندجمله‌ای f^* بپردازیم، به همان مثال ۱ می‌رسیم که در شماره‌ی قبل دیدیم؛ البته باید جدول عددهای اول را در اختیار داشته باشیم.

□

از این به بعد، نقش اساسی را هم‌ریختی ضرب برای $f \to f_c$ به عهده دارد که درباره‌ی چندجمله‌ای‌های با دستور $f_c(x) = f(x + c)$ درست است که در آن، c عدد درست ثابتی است.

چندجمله‌ای مثبت (با ضریب‌های درست) را «مثبت کامل» گوییم، وقتی هریک از بخشیاب‌های آن هم مثبت باشد. روشن است که برای هر چندجمله‌ای مثبت کامل، مسئله‌ی یاکوکین هم‌ارز است با مسئله‌ی کلی تجزیه‌ی چندجمله‌ای به عامل‌ها.

قضیه‌ی ۱. برای هر چندجمله‌ای f (با توان‌های مثبت و ضریب‌های درست و ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مثبت)، عدد نامنفی c وجود دارد، به نحوی که چندجمله‌ای f_c مثبت کامل باشد.

برای اثبات این قضیه، راحت‌تر است که چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی (و نه درست) را درنظر بگیریم. در آغاز فرض می‌کنیم، همه‌ی توان‌های چندجمله‌ای و نیز ضریب بزرگ‌ترین توان، مثبت باشند. بخشیاب چندجمله‌ای f را، اکنون چندجمله‌ای دلخواه g با ضریب‌های حقیقی می‌گیریم (توان‌های g را مثبت و کوچک‌تر از n چندجمله‌ی f، و ضریب بزرگ‌ترین درجه را هم مثبت فرض می‌کنیم).

مثل حالت چندجمله‌ای با ضریب‌های درست و با ضریب‌های مثبت، به شرطی که همه‌ی ضریب‌های این چندجمله‌ای نامنفی باشند، آن را مثبت و اگر همه‌ی ضریب‌های بخشیاب‌های آن مثبت باشند، آن را مثبت کامل می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم، چندجمله‌ای با ضریب‌های درست در این مفهوم، با مفهومی که در این جا برای چندجمله‌ای‌های مثبت کامل آوردیم، تطبیق نمی‌کند (درباره‌ی چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های درست، آن را «مثبت کامل با عددهای درست» می‌نامیم). در واقع، همه‌ی بخشیاب‌های با ضریب‌های مثبت چندجمله‌ای‌های دارای ضریب‌های درست می‌توانند مثبت باشند، در حالی که این چندجمله‌ای‌ها ممکن است بخشیاب‌هایی داشته باشند که نامنفی و دارای ضریب‌های حقیقی (گنگ) باشند. روشن است که هر مثبت کامل (به مفهوم تازه) چندجمله‌ای با ضریب‌های درست، باید مثبت کامل با عددهای درست باشد. بنابراین قضیه‌ی ۱ به طور مستقیم از قضیه‌ی ۲، به این شرح، نتیجه می‌شود:

قضیه‌ی ۲. برای هر چندجمله‌ای f_0 با ضریب‌های حقیقی (و ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مثبت)، عدد نامنفی و درست c وجود دارد که برای آن $f_c(x) = f_0(x + c)$ مثبت کامل باشد.

برای اثبات قضیه‌ی ۲، باید با دقت ساختار چندجمله‌ای‌های مثبت کامل با ضریب‌های حقیقی را تجزیه و تحلیل کنیم. چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی را «نیم‌پایدار» می‌نامیم، وقتی که بخش‌های حقیقی همه‌ی ریشه‌های آن نامثبت باشند. روشن است که نتیجه‌ی چندجمله‌ای نیم‌پایدار، یک چندجمله‌ای نیم‌پایدار است و برعکس، هر بخشیابی از چندجمله‌ای نیم‌پایدار، یک چندجمله‌ای نیم‌پایدار است.

پیش‌قضیه‌ی ۱. چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، تنها وقتی مثبت کامل است که نیم‌پایدار باشد.

اثبات: روشن است که حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های مثبت کامل، مثبت کامل است و برعکس، هر بخشیاب چندجمله‌ای مثبت کامل، مثبت کامل است. در ضمن می‌دانیم، هر چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، به صورت حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های خطی و درجه‌ی دوم قابل تجزیه است. بنابراین کافی است، پیش‌قضیه را تنها برای چندجمله‌ای‌های اخیر ثابت کنیم. ولی در این حالت، اثبات پیش‌قضیه، خیلی زود به طور مستقیم و یا محاسبه‌ی ریشه‌ها به دست می‌آید.

برای اثبات قضیه‌ی ۲ تنها توجه می‌کنیم که برای هر ریشه‌ی α از چندجمله‌ای f، $\alpha - c$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای f_c است، و برعکس، برای هر ریشه‌ی β از چندجمله‌ای f_c، عدد $\beta + c$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای f است. به این ترتیب، همه‌ی شرط‌های قضیه‌ی ۲ برقرار هستند.

با اثبات قضیه‌ی ۲، قضیه‌ی ۱ هم به طور کامل ثابت می‌شود. اگر به چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های درست برگردیم، این قاعده را برای تجزیه‌ی هر چندجمله‌ای از این گونه، به‌دست می‌آوریم.

قاعده. برای این که چندجمله‌ای f با ضریب‌های درست را تجزیه کنیم، باید:

۱. عدد درست و نامنفی c را طوری پیدا کنیم که چندجمله‌ای $g = f_c$ مثبت کامل باشد؛

۲. چندجمله‌ای g را به ضریب عامل‌ها تجزیه کنیم:

$$g = g_1 \dots g_r$$

۳. چندجمله‌ای‌های f_1، ... و f_r را برای چندجمله‌ای f با این دستورها پیدا کنیم: $f_1 = (g_1) - c, \dots, f_r = (g_r) - c$

تحقق قاعده‌ی ۳ خود به خود حاصل می‌شود و برای قاعده‌ی ۲ باید آن‌چه را در بند مربوط به «چندجمله‌ای مثبت» گفتیم، انجام داد. و اما آن‌چه به قاعده‌ی ۱ مربوط می‌شود. برای پیدا کردن عدد c معنایش می‌کنیم، ریشه‌های چندجمله‌ای f را به تقریب محاسبه کنیم (تا یک رقم بعد از ممیز) و به عنوان عدد c، کم‌ترین عدد درست را انتخاب کنیم که بزرگ‌تر از بخش‌های حقیقی همه‌ی ریشه‌های آن باشد.

روش دیگر محاسبه‌ی عدد c بر این اساس است که قدرمطلق مقدار بخش حقیقی هر عدد مختلط، بزرگ‌تر از مدول آن نباشد. به این ترتیب، هر عدد c بزرگ‌تر از مدول همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f، که این ویژگی را دارد، مثبت کامل (نیم‌پایدار) است. از طرف دیگر، به سادگی می‌توان آزمایش کرد، مدول همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f از عدد $\frac{A}{a_n} + 1$ تجاوز نمی‌کند که در آن، $a_n > 0$ ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی چندجمله‌ای f، و A بزرگ‌ترین قدرمطلق مقدار سایر ضریب‌هاست. بنابراین هر عدد درست c، بزرگ‌تر از عدد ۱۱، و برای هدف ما مفید است.

راه سوم محاسبه‌ی عدد c این است که ما می‌توانیم پیش‌بینی کنیم، چندجمله‌ای مفروض نیم‌پایدار است یا نه. در این حالت، چندجمله‌ای f_c را پشت سر هم برای مقدارهای c، از ۰ به بالا آزمایش و نیم‌پایدار بودن آن را تحقیق می‌کنیم که به هر حال به مقدار لازم c می‌رسیم.

برای این که نیم‌پایدار بودن را معین کنیم، معیارهای متفاوتی وجود دارند. از بین این معیارها، ساده‌ترین آن‌ها را که متعلق به رائوس است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

چندجمله‌ای دلخواهی با ضریب‌های حقیقی باشد. این جدول را تشکیل می‌دهیم:

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$	a_{n-2k}
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$	a_{n-2k-1}
$a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_n a_{n-2k-1} - a_{n-1} a_{n-2k}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

قانون تشکیل دو سطر اول این جدول روشن است. اکنون به سطرهای $p \geq 2$ می‌پردازیم. در qامین جا از $(p+1)$امین سطر، حاصل ضرب نخستین جمله‌ی $(p-1)$امین سطر در $(q+1)$امین جمله‌ی pامین سطر منهای حاصل ضرب نخستین جمله‌ی pامین سطر در $(q-1)$امین جمله‌ی $(p-1)$امین را قرار می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود، چنان عددی مثل $s \geq 1$ پیدا می‌شود که اولین جمله‌ی sامین سطر مخالف صفر است؛ در این صورت نخستین جمله‌های همه‌ی سطرهای بعدی برابر صفر می‌شوند.

معیار رائوس: چندجمله‌ای f تنها وقتی مثبت نیم‌پایدار است که نخستین جمله‌های نخستین سطرهای s جدول، مثبت باشند. اثبات این معیار بسیار دشوار است و ما آن را در این جا نمی‌آوریم.

یادداشت: هر سه روش به عدد c منجر می‌شود که برای آن، چندجمله‌ای f_c مثبت کامل، و مثل چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی نیم‌پایدار است. از آن‌جا که ما چندجمله‌ای f_c را لازم داریم که ویژگی مثبت کامل در عددهای درست را داشته باشد، می‌توان این مبحث را حذف کرد. در حالت کلی هیچ معیاری برای مثبت کامل با عددهای درست وجود ندارد.