اتحادهای مهم جبری

احمد قندهاری

(۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(۳) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(۴) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

(۵) $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

یا

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(۶) $(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

یا

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

(۷) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(۸) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(۹) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

اتحادهای کمکی:

۱ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۲ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۳ $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

۴ $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$

۵ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

۶ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۷ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

نتیجه اتحاد (۵)

۸ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

نتیجه اتحاد (۶)

۹ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

۱۰ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

۱۱ اگر $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow$

$a^3+b^3+c^3=3abc$

توجه: شماره‌های ۱۰ و ۱۱ به اتحاداولر- لاگرانژمعروف است.

مثال ۱ : $\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=?$

$$\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=(2x^2)^2+\left(\frac{3}{4}y^3\right)^2$$

$$+2(2x^2)\left(\frac{3}{4}y^3\right)$$

$$\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=4x^4+\frac{9}{16}y^6+3x^2y^3$$

مثال ۲ : ، $a,b>0$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=?$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

بنا به اتحاد سوم

مثال ۳ : $a.b>0$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)(\sqrt{ab}+1)=?$$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)=\sqrt{ab}-1 \Longrightarrow$$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)(\sqrt{ab}+1)=$$

$$(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{ab}+1)=ab-1$$

مثال ۴ : اگر

$A=ab+ac+bc$ و $a+b+c=0$

آنگاه A چگونه عددیست؟

داریم:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

از طرفی می‌دانیم هر جمله که توانش زوج باشد مثبت یا صفر است پس $(a^2+b^2+c^2)$ عددیست مثبت یا صفر

$$\Longrightarrow \underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{صفر است}}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{مثبت یا صفر}}+2A$$

نتیجه می گیریم عدد A باید منفی یا صفر باشد تا تساوی فوق برقرار باشد.

مثال ۵ : اگر

$$x=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$$

آنگاه (x^3-3x) مساوی چه عددی است؟

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}_{b}$$

$$x=a+b$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^3=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+$$

$$3\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\quad(x)$$

$$x^3=4+3\sqrt[3]{4-3}(x) \Longrightarrow$$

$$x^3=4+3x \Longrightarrow x^3-3x=4$$

مثال ۶ : اگر $x+\frac{1}{x}=3$ مطلوب است محاسبه:

$$x^2+\frac{1}{x^2}\ ,\ x^3+\frac{1}{x^3}\ ,\ x^6+\frac{1}{x^6}\ ,\ x^9+\frac{1}{x^9}$$

حل : طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+\frac{1}{x}=3$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2x\cdot\frac{1}{x}=9 \Longrightarrow$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=9 \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم $x+\frac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 1\times 3=27 \Longrightarrow$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

داریم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+3(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=343$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+3(7)=343 \Longrightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=322$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

داریم: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$x^9+\frac{1}{x^9}+3(x^3)\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=5832$$

$$x^9+\frac{1}{x^9}+3(18)=5832 \Longrightarrow$$

$$x^9+\frac{1}{x^9}=5778$$

مثال ۷ : اگر

$$a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$$

آنگاه؟ $a+b+c=?$

حل :

$$a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c=0$$

$$(a^2+1-2a)+(b^2+1-2b)+$$

$$(c^2+1-2c)=0$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

قبلاً گفته‌شد که اگر جمله‌ای توان زوج داشته باشد مثبت یا صفر است. این تساوی وقتی می‌تواند برقرار باشد که داخل هر پرانتز صفر باشد بنابراین:

$$\begin{aligned}&a-1=0\\&b-1=0 \Longrightarrow a=b=c=1 \Longrightarrow\\&c-1=0\end{aligned}$$

$$a+b+c=3$$

مثال ۸ : حاصل کسر مقابل‌را بیابید.

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

با شرط اینکه a و b و c مساوی نباشند.

حل :

$$\text{عبارت مخرج}=a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc$$
$$+c^2+a^2-2ac$$

$$\text{عبارت مخرج}=2a^2+2b^2+2c^2-2ab$$
$$-2ac-2bc$$

$$\text{عبارت مخرج}=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

عبارت‌صورت: بنابه اتحادهای کمکی‌شمارهٔ (۱۰) مساویش‌را می‌نویسیم.

$$\text{کسر}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2}$$

مثال ۹: اگر $a+b-c=1$ ، آنگاه

$$a^2+b^2-c^2=?$$

حل: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$$a+b=c+1$$

$$a^2+b^2+2ab=c^2+1+2c$$

$$a^2+b^2-c^2=1+2c-2ab$$

$$a^2+b^2-c^2=2\left(\frac{1}{2}+c-ab\right)$$

مثال ۱۰: ثابت کنید:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=$$
$$3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$a-b=x \qquad b-c=y \qquad c-a=z$$

حل:

$$a-b+b-c+c-a=0$$

$$\Longrightarrow x+y+z=0 \Longrightarrow$$

بنا به اتحاد کمکی شماره (۱۱) $x^3+y^3+z^3=3xyz$

$$\Longrightarrow (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$$
$$=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

تفریح اندیشه ۱

مردی در حال کندن چاهی، در حالی که در آن ایستاده، می‌باشد. بلندی مرد ۵ فوت و ۱۰ اینچ است. زمانی که به سروقت او می‌رویم می‌گوید که: یک چهارم کار را انجام داده و هنگامی که کار را تمام کند فرق سرش سه برابر مقداری که اکنون بالای زمین است زیر زمین خواهد بود. عمق چاه در پایان کار چقدراست؟

جواب در صفحهٔ ۹۶