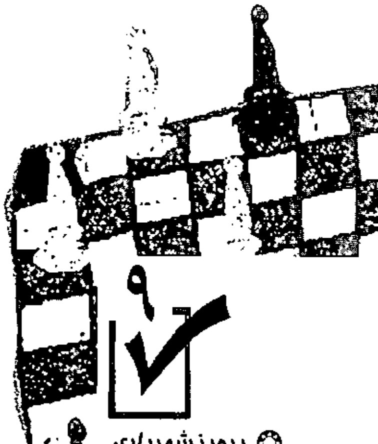


پرویز شهریاری

اتحاد و معادله

برای حل معادله های قابل حل

عادت کنیم، معادله ی درجه دوم را، نه با استفاده از دستور، بلکه به طور مستقل حل کنیم. معادله ی درجه دوم در حالت کلی، به این صورت است:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

مقدار a نمی تواند برابر صفر باشد، زیرا در این صورت به معادله‌ای از درجه ی اول می رسیم که حل آن دشوار نیست. پس، با فرض $a \neq 0$، می توانیم دو سمت معادله را بر a تقسیم کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ را به عبارتی که مجذور کامل باشد، تبدیل می کنیم. در سمت چپ برابری، $\frac{b}{a}x$، دو برابر x در جمله ی دوم است. یعنی جمله ی دوم $\frac{b}{2a}$ می شود. اگر $\frac{b^2}{4a^2}$، یعنی مجذور $\frac{b}{2a}$، را به دو سمت برابری اضافه کنیم، به دست می آید:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

اکنون، با جذر گرفتن از دو طرف، بعد بردن $\frac{b}{2a}$ به سمت راست برابری، مقدار x به دست می آید:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

این، همان دستور حل معادله ی درجه ی دوم است، ولی با این روش حل با همه ی مرحله ها آشنا می شوید و به حافظه برای به یاد سپردن دستور نیاز ندارید.

نمونه ی ۱. معادله ی $12x^2 - 17x + 6 = 0$ را حل کنید.

حل: در آغاز دو سمت برابری را بر ۱۳ تقسیم می کنیم و عدد ۶ را هم به سمت راست برابری می بریم:

$$x^2 - \frac{17}{12}x = -\frac{1}{2}$$

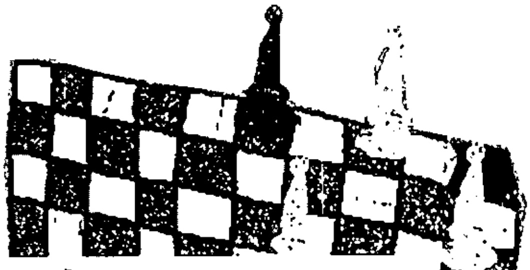
باید $x^2 - \frac{17}{12}x$ را به مجذور کامل تبدیل کنیم. $\frac{17}{12}x$ دو برابر حاصل ضرب x در عدد دوم است. پس عدد دوم برابر $\frac{17}{24}$ می شود که باید مجذور آن را به دوطرف برابری اضافه کنیم.

$$(x - \frac{17}{24})^2 = (\frac{17}{24})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{576}$$

و اگر از دو سمت برابری جذر بگیریم:

$$x - \frac{17}{24} = \pm\frac{1}{24} \Rightarrow x = \frac{17}{24} \pm \frac{1}{24}$$

و از این جا دو جواب معادله به دست می آید: $x_1 = \frac{3}{4}$ و $x_2 = \frac{2}{3}$.



نمونه‌ی ۲. معادله‌ی $2a^2x^2-3ax-2a^2+a+1=0$ را حل کنید $(a\neq 0)$:

حل: دو طرف برابری را بر $2a^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2-\frac{3}{2a}x=\frac{2a^2-a-1}{2a^2}$$

سپس، به دو طرف برابری، $\frac{9}{16a^2}$ را اضافه می‌کنیم تا سمت چپ به صورت مجذور کامل درآید:

$$(x-\frac{3}{4a})^2=\frac{16a^2-8a+1}{16a^2}=(\frac{4a-1}{4a})^2$$

از دو طرف برابری جذر می‌گیریم:

$$x-\frac{3}{4a}=\pm\frac{4a-1}{4a}$$

و از آن‌جا جواب‌های معادله به دست می‌آیند:

$$x_1=\frac{1}{a}-1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1}{2a}+1$$

تبدیل پارامتر به مجهول

برخی از معادله‌های پارامتری از درجه‌ی بالاتر از ۲ را می‌توان با تبدیل پارامتر به مجهول حل کرد. البته دو شرط دارد: ۱. معادله نسبت به پارامتر از درجه‌ی دوم باشد؛ ۲. معادله نسبت به پارامتر قابل حل باشد. به این مثال توجه کنید:

نمونه‌ی ۳. $2x^4+x^3-(3a+2)x^2+2x+a^2-1=0$، معادله‌ای است نسبت به x از درجه‌ی چهارم. ولی همین معادله نسبت به a از درجه‌ی دوم است و اگر شرط دوم را داشته باشد، قابل حل است. معادله را نسبت به a منظم می‌کنیم.

$$a^2-3x^2.a+(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)=0$$

که اگر آن را حل کنیم، به دو جواب می‌رسیم.

$$a=x^2+x-1 \quad \text{و} \quad a=2x^2-x+1$$

اکنون هریک از این معادله‌ها را که از درجه‌ی دوم نسبت به x هستند، منظم می‌کنیم:

$$x^2+x-(a+1)=0 \quad \text{و} \quad 2x^2-x+1-a=0$$

و از این دو معادله، جواب‌های x به دست می‌آیند:

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{4a+5}) \quad \text{و} \quad x_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{4a-3})$$

درباره‌ی این جواب‌ها، باید بحثی داشته باشیم تا ببینیم، در چه حالت‌هایی به جواب حقیقی می‌رسند.

۱. اگر $a>\frac{3}{4}$، آن‌گاه ۴ ریشه‌ی حقیقی داریم.

۲. اگر $-\frac{5}{3}<a<\frac{3}{4}$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی و دو ریشه‌ی موهومی دارد.

۳. اگر $a<-\frac{5}{3}$، آن‌گاه چهار ریشه‌ی معادله موهومی است.

۴. در حالت $a=\frac{3}{4}$، معادله دو ریشه برابر و دو ریشه‌ی ساده‌ی حقیقی دارد.

۵. در حالت $a=-\frac{5}{4}$، معادله دارای دو ریشه‌ی برابر حقیقی و دو ریشه‌ی موهومی است.

مواظب باشید، بحث درباره‌ی تعداد جواب‌های حقیقی و موهومی را فراموش نکنید.

نمونه‌ی ۴. $x^3-(3+\sqrt{3})x+3=0$

حل: این معادله را می‌توان با تجزیه‌ی عبارت سمت چپ برابری حل کرد، ولی بهتر است با در نظر گرفتن $a=\sqrt{3}$، آن را به یک معادله‌ی پارامتری تبدیل کنیم:

$$x^3-(a^2+a)x+a^2=0$$

اکنون معادله را نسبت به پارامتر a منظم می‌کنیم:

$$(1-x)a^2-x.a+a^2=0$$

که چون معادله‌ای است درجه دوم نسبت به مجهول a، می‌توان آن را حل کرد:

$$a=x \quad \text{و} \quad a=\frac{x^2}{1-x}$$

اگر به جای a مقدارش $\sqrt{3}$ را قرار دهیم:

$$x=\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$$

بنابراین، جواب‌های معادله‌ی درجه سوم به این صورت است:

$$x_1=\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x_{2,3}=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$$

نمونه ی ۵. $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

حل: این معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\left[(x+\frac{a+b}{2})+\frac{a-b}{2}\right]^4+\left[(x+\frac{a+b}{2})-\frac{a-b}{2}\right]^4=c$$

اگر فرض کنیم:

$$x+\frac{a+b}{2}=t \quad \text{و} \quad \frac{a-b}{2}=\alpha$$

به این معادله می‌رسیم:

$$(t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=c\Rightarrow$$
$$2t^4+12a^2t^2+(2\alpha^2-c)=0$$

که یک معادله ی دومجذوری است و با فرض $t^2=y$، به معادله‌ای درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود.

برای مثال، فرض کنید، می‌خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$(x+2)^4+(x+5)^4=17$$

واسطه‌ی حسابی $x+2$ و $x+5$، یعنی $x+\frac{7}{2}$ را برابر t می‌گیریم:

$$(t-\frac{3}{2})^4+(t+\frac{3}{2})^4=17\Rightarrow$$
$$2t^4+27t^2-\frac{55}{8}=0$$

که از آن‌جا جواب‌های $t^2=\frac{1}{4}$ و $t^2=-55$ و یا $t^2=\pm\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند (دو جواب دیگر موهومی هستند).

درنتیجه، اگر به جای t، مقدارش را برحسب x قرار دهیم، برای x به دست می‌آید:

$$x=-4 \quad \text{و} \quad x=-3$$

نمونه‌ی ۶. اگر $a+b=c+d$ باشد، این معادله را حل کنید:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$$

حل: این معادله را روی یک مثال حل می‌کنیم. مطلوب است حل معادله‌ی:

$$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)=-72$$

داریم: $5-4=3-2$ و معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\left[(x+2)(x-3)\right]\times\left[(x+4)(x-5)\right]=72$$

و: $(x^2-x-6)(x^2-x-20)=72$ که اگر فرض کنیم $x^2-x=y$، به یک معادله‌ی درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2-36y+48=0\Rightarrow t=2,24$$

از آن‌جا، دو معادله‌ی درجه دوم برای تعیین مقدار x به دست می‌آید.

$$x^2-2x=2 \quad \text{و} \quad x^2-2x=24$$

که جواب‌های x را به ما می‌دهند:

$$x_1=-1 \quad \text{و} \quad x_2=2 \quad \text{و} \quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{97}}{9}$$

معادله های وارون

به معادله‌ای وارون می‌گوییم که با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ و یا x به $-\frac{1}{x}$، تغییر نکند. در حالت اول آن را معادله‌ی وارون مثبت و در حالت دوم آن را معادله‌ی وارون منفی می‌گویند.

نمونه‌ی ۷. این معادله‌ی وارون را حل کنید:

$$2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0$$

دو طرف این معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم ($x\neq 0$ است) و از ضریب برابر فاکتور می‌گیریم:

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-13(x+\frac{1}{x})+24=0$$

فرض می‌کنیم: $x+\frac{1}{x}=t$. با مجذور کردن دو طرف، به دست می‌آید:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=t^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

بنابراین، معادله‌ی مفروض چنین می‌شود:

$$2(t^2-2)-13t+24=0$$

یعنی معادله‌ای درجه دوم به صورت $3t^3-13t+20=0$ به دست می‌آید که جواب آن و درنتیجه جواب‌های x را می‌توان پیدا کرد.

پاسخ: $x_1 = 2+\sqrt{3}$ ، $x_2 = 2-\sqrt{3}$ ، $x_3 = 2$ ،
$x_4 = \frac{1}{2}$.

نمونه‌ی ۸. این معادله را حل کنید.

$$30x^8 - 73x^7 + 90x^6 - 292x^5 + 150x^4 - 292x^3 + 90x^2 - 73x + 30 = 0$$

حل: دو طرف معادله را بر x^4 تقسیم می‌کنیم و از ضریب‌های برابر در معادله فاکتور می‌گیریم:

$$30\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right) - 73\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) + 90\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 292\left(x+\frac{1}{x}\right)+150=0$$

اگر فرض کنیم: $x+\frac{1}{x}=t$ خواهیم داشت:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2;\quad x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$30t^4-73t^3-30t^2-73t+30=0$$

که خود یک معادله‌ی وارون درجه‌ی ۳ است. دو سمت معادله را بر t^2 تقسیم می‌کنیم: و سپس فرض می‌کنیم: $t+\frac{1}{t}=y$. سرانجام به این معادله‌ی درجه دوم می‌رسیم:

$$30y^2-73y-97=0$$

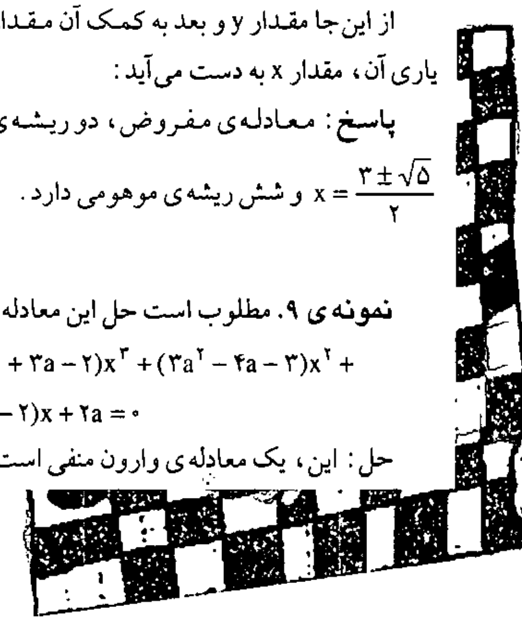
از این‌جا مقدار y و بعد به کمک آن مقدار t و سپس به یاری آن، مقدار x به دست می‌آید:

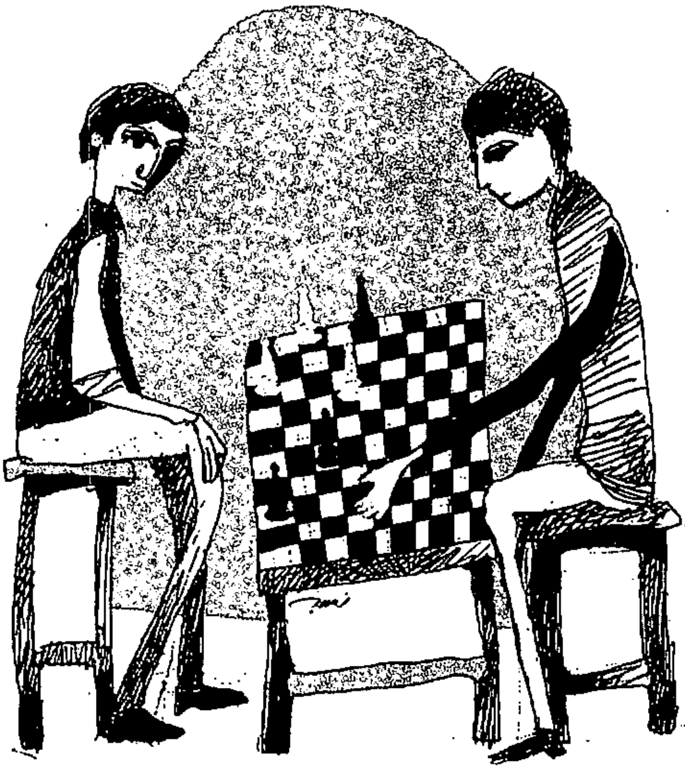
پاسخ: معادله‌ی مفروض، دو ریشه‌ی حقیقی $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ و شش ریشه‌ی موهومی دارد.

نمونه‌ی ۹. مطلوب است حل این معادله:

$$3ax^4-(2a^2+3a-2)x^3+(3a^2-4a-3)x^2+(2a^2+3a-2)x+2a=0$$

حل: این، یک معادله‌ی وارون منفی است و بنابراین،





بعد از تقسیم دو سمت آن بر x^2 ، باید $x-\frac{1}{x}$ را مجهول تازه‌ای بگیریم. اگر فرض کنیم: $x-\frac{1}{x}=t$ ، سرانجام به این معادله می‌رسیم:

$$2at^2-(2a^2+3a-2)t+3(a^2-1)=0$$

که برای t، دو جواب $\frac{3}{2}$ و $\frac{a^2-1}{a}$ را می‌دهد. درنتیجه با قراردادن این مقدارها در $x-\frac{1}{x}=t$ ، مقدارهای x به دست می‌آیند.

پاسخ: $x_1=2$ ، $x_2=-\frac{1}{2}$ ، $x_3=a$ ، $x_4=-\frac{1}{a}$.

حل چند معادله

نمونه‌ی ۱۰. معادله‌ی $x^5-5x^3+5x-1=0$ را حل کنید.

حل: سمت چپ معادله‌ی مفروض را، به ترتیب این طور

می‌نویسیم:

$$x^5-5x^3+5x-1=(x^5-1)-5x(x^2-1)$$
$$=(x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)$$
$$=\frac{1}{4}(x-1)\Big[(4x^4+4x^3+x^2)-6(2x^2+x)+9$$
$$-5(x^2+2x+1)\Big]=\frac{1}{4}(x-1)\Big[2(x^2+x-3)^2-5(x+1)^2\Big]$$

پاسخ: $x_1=1$ و $x_{2,3}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}})$

$$x_{4,5}=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}})$$

نمونه‌ی ۱۱. $[x]=\left[\frac{x^3-2}{3}\right]$ ($[a]$، یعنی بزرگ‌ترین عدد درستی که از a تجاوز نکند.)

حل: روشن است، معادله برای مقدارهایی از x که در نابرابری‌های

$$\frac{x^3-2}{3}\ge x+1 \quad \text{و} \quad \frac{x^3-2}{3}\le x-1$$

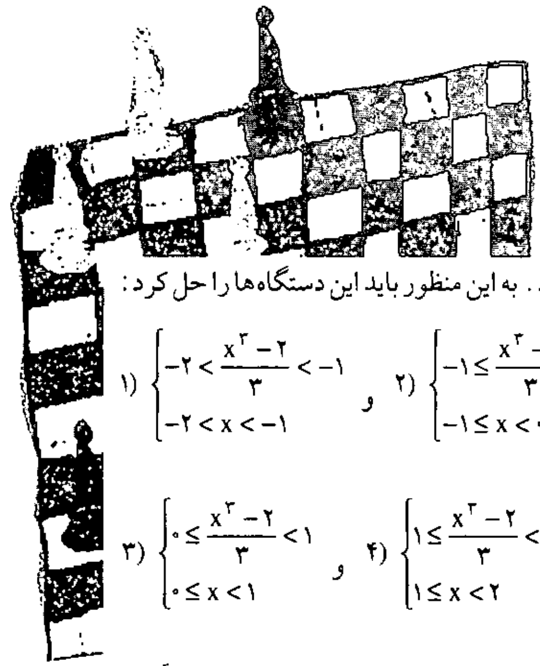
صدق کند، جواب ندارد. بین جواب‌های نامعادله‌ی اول $x\ge 3$ وجود دارد، زیرا داریم:

$$\frac{x^3-2}{3}\ge x+1\Rightarrow x^3\ge 3x+5\Rightarrow$$
$$x^2(x-3)\ge -3x^2+3x+5$$

وقتی $x\ge 3$ باشد، سمت چپ نابرابری غیرمنفی و سمت راست آن منفی است. بنابراین $x\ge 3$ جزو جواب‌های معادله نیست. ولی $x\le -2$ بین جواب‌های معادله‌ی دوم است، زیرا:

$$\frac{x^3-2}{3}\le x-1\Rightarrow x^3\le 3x-1$$
$$\Rightarrow x^2(x+2)\le 2x^2+2x-1$$

وقتی $x\le -2$ باشد، سمت راست نامعادله مثبت می‌شود، درحالی‌که سمت چپ آن مثبت نیست. بنابراین جواب‌های معادله‌ی مفروض را باید در بازه‌ی $-2<x<3$



جست‌وجو کرد. به این منظور باید این دستگاه‌ها را حل کرد:

$$1)\ \begin{cases}-2<\frac{x^3-2}{3}<-1\\ -2<x<-1\end{cases} \quad \text{و} \quad 2)\ \begin{cases}-1\le\frac{x^3-2}{3}<0\\ -1\le x<0\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}0\le\frac{x^3-2}{3}<1\\ 0\le x<1\end{cases} \quad \text{و} \quad 4)\ \begin{cases}1\le\frac{x^3-2}{3}<2\\ 1\le x<2\end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases}2\le\frac{x^3-2}{3}<3\\ 2<x<3\end{cases}$$

دستگاه (۳) دارای جواب نیست و بقیه‌ی دستگاه‌ها، این جواب‌ها را دارند:

$$-\sqrt[3]{4}<x<-1 \quad \text{و} \quad -1\le x<0$$
$$\sqrt[3]{5}\le x<2 \quad \text{و} \quad 2\le x<\sqrt[3]{11}$$

پاسخ: $\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{11}$ و $-\sqrt[3]{4}\le x<0$.

نمونه‌ی ۱۲: $\left[\frac{y^2}{x^2}\right]=\frac{2x+3y}{2x}$

حل: $\frac{3y}{2x}$ باید عددی درست باشد. آن را k می‌نامیم و به این معادله می‌رسیم:

$$1+k=\left[\frac{y^2}{x^2}\right]=\left[\frac{4k^2}{9}\right]$$

و از آن‌جا:

$$1+k\le\frac{4k^2}{9}<2+k$$

به دو نامعادله می‌رسیم:

$$\begin{cases}4k^2-9k-9\ge 0\\ 4k^2-9k-18<0\end{cases}$$

درنتیجه: $3\le k<3.6$، چون k عددی درست است، پس: $k=3$. سرانجام داریم:

$$y=2x$$