۸

پرویز شهریاری

اتحاد و معادله

باز هم چند مساله‌ی نامتعارف

اشاره

در شماره‌های قبل مساله‌هایی را طرح کردیم که حل آن‌ها منجر به حل معادله‌ها و نامعادله‌های نامتعارف شد، اینک ادامه آن مسائل را در پی می‌آوریم:

مساله‌ی ۲۴. همه‌ی عددهای شش رقمی را پیدا کنید که:

۱. رقم‌های هر عدد با هم فرق داشته باشند، ولی همه‌ی عددهای شش رقمی با همان رقم‌ها ساخته شده باشند؛

۲. هم عددهای شش رقمی و هم مجموع رقم‌های هر کدام از آن‌ها، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند؛

۳. رقم دوم از سمت چپ برابر ۵ و رقم سوم از سمت چپ برابر ۲ باشد.

حل: عدد را به صورت $\overline{x52yzt}$ $(x \neq 0)$ در نظر می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$x+5+2+y+z+t=11n \qquad (1)$$

چون رقم‌های عدد با هم فرق دارند، مجهول x، y، z و t می‌توانند، دست کم مقدارهای ۰، ۱، ۳، ۴ و حداکثر ۶، ۷، ۸ و ۹ را بپذیرند. پس

$$15 \leq 11n \leq 37$$

بنابراین، عدد n می‌تواند برابر یکی از دو عدد ۲ یا ۳ باشد و از معادله‌ی (۱)، دو معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x+y+z+t=15 \qquad (2)$$

$$x+y+z+t=26 \qquad (3)$$

عدد باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. یعنی:

$$x-5+2-y+z-t=11m$$

اگر به مقدارهای ممکن برای x، y، z و t توجه کنیم، به دست می‌آید:

$$-19 \leq 11m \leq 13$$

و m می‌تواند یکی از مقدارهای ۱-، ۰، یا ۱ را بپذیرد. با استفاده از این مقدارهای m، به این سه معادله می‌رسیم:

$$x-y+z-t=-8 \qquad (4)$$

$$x-y+z-t=3 \qquad (5)$$

$$x-y+z-t=14 \qquad (6)$$

برای حل مسأله، باید شش دستگاهی را بررسی کرد که از ترکیب هر یک از دو معادله‌ی (۲) و (۳) با هر یک از سه معادله‌ی (۴) و (۵) و (۶) به دست می‌آید. دستگاه‌های شامل معادله‌های (۲) و (۴)، (۳) و (۶)، (۳) و (۵)، (۳) و (۶) جواب ندارند (مجموع دو عدد زوج برابر عددی فرد می‌شود و یا مجموع دو رقم از ۱۸ بالاتر می‌رود). بنابراین تنها دو دستگاه باقی می‌ماند: (۲) و (۵)، و (۳) و (۴).

از دستگاه

$$\begin{cases} x+y+z+t=15 \\ z-y+z-t=3 \end{cases}$$

به دست می‌آید: $x+z=9$ و $y+t=6$.

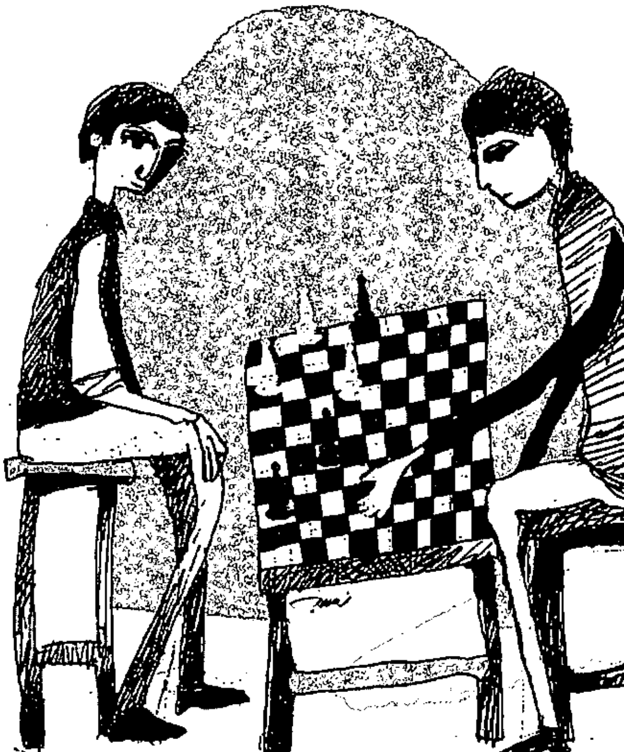
دیده می‌شود که x می‌تواند یکی از عددهای ۱، ۳، ۶، ۸ و ۹ باشد. اگر $x=3$، آن‌گاه $z=6$ و در نتیجه معادله‌ی $y+t=6$ بدون جواب می‌ماند، زیرا رقم‌ها باید با هم فرق داشته باشند، به همین ترتیب، برای $x=6$ و $z=3$ یا $x=9$ و $z=0$، معادله‌ی دوم جواب ندارد. دو مقدار برای x می‌ماند که برای آن‌ها می‌توان، مقدارهای z، t و y را پیدا کرد:

۱) $x=1, z=8, y=0, t=6$

۲) $x=1, z=8, y=6, t=0$

۳) $x=8, z=1, y=0, t=6$

۴) $x=8, z=1, y=6, t=0$



از دستگاه دوم، یعنی

$$\begin{cases} x+y+z+t=۲۶ \\ x-y+z-t=۸ \end{cases}$$

به دست می‌آید: $x+z=۹$ و $y+t=۱۷$.

با استدلالی شبیه حالت پیش، این جواب‌ها پیدا می‌شوند:

۱) $x=۳, z=۶, y=۸, t=۹$

۲) $x=۳, z=۶, y=۹, t=۸$

۳) $x=۶, z=۳, y=۸, t=۹$

۴) $x=۶, z=۳, y=۹, t=۸$

به این ترتیب، مسأله دارای دو گروه چهار جوابی است (و نه هشت جواب):

۱) ۱۵۲۰۸۶، ۱۵۲۶۸۰، ۸۵۲۰۱۶، ۸۵۲۶۱۰

۲) ۳۵۲۸۶۹، ۳۵۲۹۶۸، ۶۵۲۸۳۹، ۶۵۲۹۳۸

هر هشت جواب را با هم نمی‌توان جواب مسأله دانست، زیرا برای نمونه دو عدد ۱۵۲۰۸۶ و ۶۵۲۸۳۹ رقم‌های یکسان ندارند. بنابراین، گروه چهار عددی (۱) یا گروه چهار عددی (۲) را می‌توان جواب مسأله دانست.

مسأله‌ی ۲۵. تابع f با این ضابطه داده شده است:

$f(x)=x^۳+x,\ x\in R$

اگر g تابع معکوس f باشد، این معادله را حل کنید:

$f(x)=g(x)$

حل: برای $x>۰$ نابرابری $f(x)>۰$ برقرار است. بنابراین، بخشی از نمودار تابع f که در ربع اول محورهای مختصات قرار دارد، بالای خط راست $y=x$ واقع است و نمودار g در این ربع؛ که قرینه‌ی نمودار تابع f نسبت به خط راست $y=x$ است، زیر این خط راست واقع می‌شود. در نتیجه، برای $x>۰$ نمودارهای تابع f و g نقطه‌ی مشترکی ندارند.

از سوی دیگر، تابع‌های f و g، تابع‌هایی فردند. یعنی این معادله نمی‌تواند ریشه‌ی منفی داشته باشد.

معادله تنها یک ریشه دارد: $x=۰$. زیرا $f(۰)=۰$ و بنا به تعریف $g(۰)=۰$، بنابراین $f(۰)=g(۰)$.

مسأله‌ی ۲۶. معادله‌ی $\sqrt[۳]{۲-x}+\sqrt{x-۱}=۱$ را حل کنید.

حل: مجهول‌های تازه‌ای انتخاب می‌کنیم:

$y=\sqrt[۳]{۲-x},\ z=\sqrt{x-۱}$

در این صورت، به این دستگاه می‌رسیم:

$y+z=۱, y^۳+x=۲, z^۲+۱=x$

از آن‌جا داریم: $y^۳+z^۲=۱$ و $y+z=۱$.

در معادله‌ی اول $z=۱-y$ قرار می‌دهیم:

$y^۳+y^۲-۲y=۰, y\in\{۰,۱,-۲\}$.

بنابراین، معادله‌ی فرضی سه ریشه دارد:

$x_۱=۱, x_۲=۲, x_۳=۱۰$

مسأله‌ی ۲۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که مجموع توان‌های دوم همه‌ی جواب این معادله، برابر ۴ شود:

$\log_a|x-۲a|+\log_a x=۲$

حل: معادله‌ی مفروض با معادله‌ی $x|x-۲a|=a^۲$ هم‌ارز است که برای حل آن باید ریشه‌های مثبت معادله‌ی $x^۲(x-۲a)^۲=a^۴$ را به دست آورد. معادله‌ی اخیر به این

صورت در می‌آید:

$$(x^2-2ax+a^2)(x^2-2ax-a^2)=0$$

چون $a>0$، در نتیجه این معادله دارای دو جواب مثبت a و $a(1+\sqrt{2})$ است و مجموع توان‌های دوم آن‌ها وقتی برابر ۴ می‌شود که داشته باشیم: $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

مسأله‌ی ۲۸. همه‌ی مقدارهای a را پیدا کنید که برای هر کدام از آن‌ها، تعداد ریشه‌های مثبت معادله‌ی

$$\left[(x-a-1)^2-2\right](x-a-1)^2=a^2-1$$

بیش از تعداد ریشه‌های منفی آن باشد.

حل: اگر همه‌ی جمله‌ها را به سمت چپ معادله منتقل کنیم. معادله به صورت $f(x).g(x)=0$ در می‌آید که در آن

$$f(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+1),$$
$$g(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+3)$$

سه جمله‌ای $f(x)$ برای $a\geq -1$ ریشه‌های حقیقی دارد. برای $a>0$ ریشه‌های آن مثبت و برای $-1<a<0$ ریشه‌هایی با علامت‌های متفاوت دارد (حالت‌های $a=0$ و $a=-1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم). اگر به همین ترتیب درباره‌ی سه‌جمله‌ای $g(x)$ استدلال و سپس نتیجه‌ی دو استدلال را با هم مقایسه کنیم، روشن می‌شود که برای $a>0$ تعداد ریشه‌های مثبت معادله از تعداد ریشه‌های منفی آن بیش‌تر است.

درباره‌ی حالت $a=0$، $a=1$، $a=-1$ و $a=-3$، تنها حالت $a=0$ با شرط مسأله سازگار است. به این ترتیب، به جواب $a\geq 0$ می‌رسیم.

مسأله‌ی ۲۹. اگر α و β، به ترتیب ریشه‌های دو معادله‌ی $2\cos x=\log_{\frac{5}{8}} x$ و $2\sin x=\log_{\frac{5}{8}} x$ باشند، ثابت کنید $\alpha>\beta$.

حل: اگر نمودار تابع‌های $y=2\sin x$، $y=2\cos x$ و $y=\log_{\frac{5}{8}} x$ را رسم کنیم، قانع می‌شویم که:

$$\beta\leq\frac{\pi}{6}\leq\alpha$$

اکنون ثابت می‌کنیم، علامت‌های نابرابری به صورت اکید است و برابری نمی‌تواند درست باشد.

برای اثبات نابرابری $\beta<\frac{\pi}{6}$ و $\alpha>\frac{\pi}{6}$، کافی است ثابت کنیم:

$$\log_{\frac{5}{8}}\frac{\pi}{6}<2\cos\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \log_{\frac{5}{8}}\frac{\pi}{6}>2\sin\frac{\pi}{6}$$

به زبان دیگر، باید ثابت کنیم:

$$1<\log_{\frac{5}{8}}\frac{\pi}{6}<\sqrt{3}\Rightarrow\frac{5}{8}>\frac{\pi}{6}>\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$$

نابرابری سمت چپ به نابرابری $4\pi<15$ منجر می‌شود که درست است. نابرابری سمت راست هم $\pi^2>\frac{125\times 9}{128}$ می‌شود که باز هم درست است.

مسأله‌ی ۳۰. مطلوب است مجموع توان‌های یازدهم ریشه‌های معادله‌ی $x^3+x+1=0$

حل: α، β و γ را ریشه‌های معادله‌ی مفروض می‌گیریم، داریم:

$$\alpha^3=-(\alpha+1)\Rightarrow\alpha^{11}=\alpha^2.(\alpha^3)^3=\alpha^2[-(\alpha+1)^3]$$

و از آن‌جا

$$\alpha^{11}=-\alpha^5-3\alpha^4-3\alpha^3-\alpha^2$$
$$=-(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha+2)+3\alpha^2+5\alpha+2$$
$$=3\alpha^2+5\alpha+2$$

به همین ترتیب:

$$\beta^{11}=3\beta^2+5\beta+2 \quad \text{و} \quad \gamma^{11}=3\gamma^2+5\gamma+2$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$\alpha^{11}+\beta^{11}+\gamma^{11}=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+5(\alpha+\beta+\gamma)+6=0$$

زیرا بنا به رابطه‌های ویت (رابطه‌های بین ضریب ریشه‌های معادله) داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=0$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$
$$=\frac{b^2}{a^2}-2\times\frac{c}{a}=0-2\times 1=-2$$

یادداشت

اگر فرض کنیم $s_k=\alpha^k+\beta^k+\gamma^k$ و سه رابطه‌ی $\alpha^3+\alpha+1=0$، $\beta^3+\beta+1=0$ و $\gamma^3+\gamma+1=0$ را به ترتیب در α^k، β^k و γ^k ضرب کنیم، بعد از جمع برابری‌ها، به رابطه‌ی بازگشتی $s_{k+3}+s_{k+1}+s_k=0$ می‌رسیم که به یاری آن می‌توان مجموع توان‌های مشابه ریشه‌ها را محاسبه کرد:

$$s_0=\alpha^0+\beta^0+\gamma^0=3, s_1=0, s_2=-2$$

اکنون می‌توانیم به یاری s_0 و s_1، مقدار s_3 را به دست آوریم:

$$s_3 = -(s_1 + s_0) = -3$$

و به همین ترتیب:

$$s_4 = 2, s_5 = 5, s_6 = 1, s_7 = -7, s_8 = -6,$$
$$s_9 = 6, s_{11} = -(s_9 + s_8) = -(6 - 6) = 0$$

مسأله‌ی ۳۱. این معادله‌ی مثلثاتی را حل کنید:

$$\sin x\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right) + \cos x\left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right) = 0$$

حل: ضرب‌ها را انجام می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$\left(\sin x\cos\frac{x}{4} + \cos x\sin\frac{x}{2}\right) - 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 0$$

که ما را به معادله‌ی $\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2$ می‌رساند. بیش‌ترین مقدار سینوس برابر ۱ و بیش‌ترین مقدار کسینوس هم برابر واحد است. بنابراین، این معادله تنها وقتی برقرار است که دو جمله‌ی سمت چپ برابری، به طور هم‌زمان برابر واحد باشند:

$$\sin\frac{5x}{4} = 1 \quad \text{و} \quad \cos x = 1$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$x = 2\pi \times \frac{4k+1}{5} \quad \text{و} \quad x = 2\pi n$$

(k و n عددهای درستی هستند). برای این که این دو عدد برابر باشند، باید $\frac{4k+1}{5}$ عدد درستی باشد. هر عدد درست k می‌تواند به یکی از این چند صورت باشد:

$$5m, 5m+1, 5m+2, 5m+3, 5m+4$$

(m عددی درست است) و با آزمایش مستقیم روشن می‌شود که تنها برای $k = 5m + 1$، عدد $\frac{1+4k}{5}$ عددی درست می‌شود. به این ترتیب، جواب معادله چنین است:

$$x = (1 + 4m)\pi \quad \text{و} \quad m \in Z$$

مسأله‌ی ۳۲. دو گروه A و B برای مسابقه‌ی شطرنج انتخاب شدند. قرار بر این بود که هر فرد از یک گروه، با هر فرد گروه دیگر در یک دوره بازی شرکت کند. در این صورت، تعداد کل دورهای بازی، چهار برابر تعداد همه‌ی شرکت‌کنندگان مسابقه‌ی دو گروه می‌شد. ولی به دلیل این که از هر گروه یک