اتحاد و معادله ۷

پرویز شهریاری

اشاره

در شمارهٔ قبل دوازده مسأله را مطرح کردیم که حل آن‌ها منجر به حل معادله‌های نامتعارف شد، اینک ادامه آن مسائل و مسائلی را که منجر به نامعادله‌های نامتعارف می‌شوند، در پی می‌آوریم.

برخی معادله‌ها و نامعادله‌های نامتعارف

مسأله ۱۲. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$، در دستگاه به مبنای ۱۰ را پیدا کنید؛ به شرطی که داشته باشیم:

$$\overline{xyz} = xyz(x+y+z)$$

$\overline{xyz}$ با پاره‌خط راستی بالای آن به معنای یک عدد سه رقمی است که z یکان آن، y دهگان آن و x صدگان آن باشد.

حل: باید این معادله را حل کنیم:

$$100x+10y+z = xyz(x+y+z)$$

از دو طرف برابری $x+y+z$ را کم می‌کنیم:

$$9(11x+y)=(x+y+z)(xyz-1) \qquad (1)$$

با شرط x، y و z، مثبت و کوچک‌تر از ۱۰.

از معادله روشن می‌شود که x+y+z و $(xyz-1)$ باید بر ۳ بخش‌پذیر باشند؛ ولی در این صورت (با آزمایش همهٔ حالت‌های ممکن) روشن می‌شود که x، y و z باید در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۱ برسند و آن‌وقت $11x+y$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین باید یکی از دو عامل x+y+z یا $xyz-1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند.

اگر $x+y+z>17$ باشد، آن‌وقت:

$$xyz \ge 72 \ ,\ xyz(x+y+z) > 1000$$

یعنی برابر یک عدد چهار رقمی می‌شود. به این ترتیب، اگر x+y+z بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$11x+y = xyz-1 \text{ و } x+y+z=9$$

در این حالت داریم:

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} = 3 \Rightarrow xyz \le 27$$

و x می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد؛ زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت:

$$xyz = 11x+y+1 > 27$$

در حالت $x=2$، به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=8 \ ,\ 2yz=y+23$$

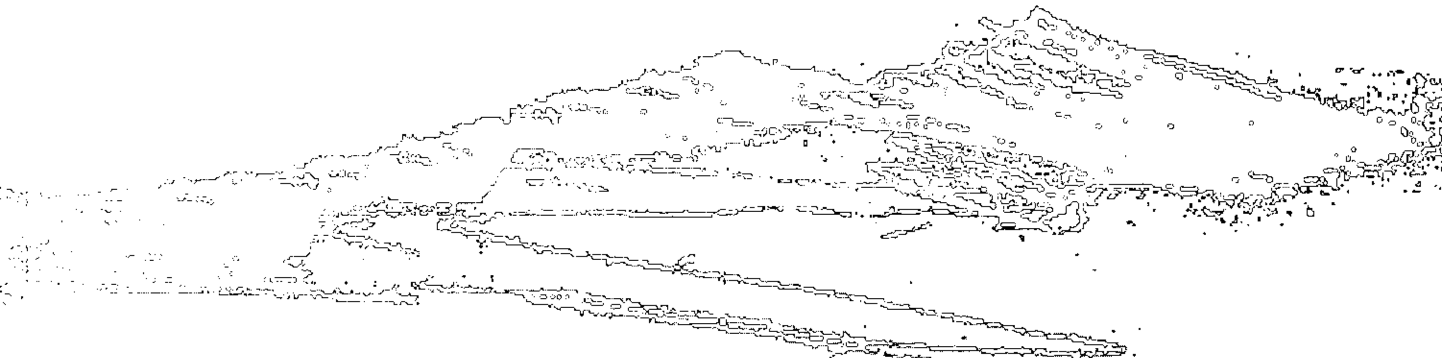
که برای y و z، عددهای درست به‌دست نمی‌آید. بنابراین باید فرض کرد: $x=1$ و به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=8 \ ,\ 11+y=yz-1$$

که از آن جواب به‌دست می‌آید: ۱۳۵ و ۱۴۴.

اکنون به حالتی می‌پردازیم که $(xyz-1)$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد. اگر $xyz-1=9$، آن‌وقت از (۱) به‌دست می‌آید $z=10x$، که ممکن نیست؛ در حالت‌هایی هم که $xyz-1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ یا ۹۰ باشد، ممکن نیست؛ زیرا در این حالت‌ها xyz شامل عامل اولی بزرگ‌تر از ۱۰ می‌شود.

در حالت $xyz-1=27$، به این دستگاه می‌رسیم:



$$8x = 2y + z \ , \ xyz = 280$$

که جواب قابل قبولی برای مسأله ندارد.

در حالت $xyz - 1 = 36$ هم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$4x = 6y + 7z \ , \ xyz = 64$$

که با هم جوابی نمی‌دهد، و سرانجام اگر (برای $m > 10$) داشته باشیم:

$$xyz - 1 = 9m$$

به‌دست می‌آید: $11x + y = m(x + y + z)$، که ممکن نیست.

پاسخ. ۱۳۵ ، ۱۴۴ .

مسألهٔ ۱۳. معادلهٔ $[x[x]] = 1$ را حل کنید.

حل: این معادله با این نامعادله‌ها هم‌ارز است:

$$1 \le x[x] < 2$$

x را به صورت $x = k + \alpha$ می‌نویسیم، که در آن $k = [x]$ و $\alpha = x - [x]$. نابرابری به این صورت درمی‌آید:

$$1 \le k^2 + \alpha k < 2 \qquad (1)$$

اما نابرابری برای $k = 1$ و $0 \le \alpha < 1$ برقرار است و برای $k \ge 2$ و $k = 0$ برقرار نیست. برای $k = -1$ تنها به ازای $\alpha = 0$ برقرار است. در حالت $k = -2$ داریم $k^2 \ge 4$ و $\alpha k \le 0$؛ یعنی:

$$k^2 + \alpha k \ge k^2 \ge 4$$

و نابرابری (۱) برقرار نیست.

پاسخ. $1 \le x < 2$ و $x = -1$.

مسألهٔ ۱۵. عددی چهار رقمی پیدا کنید که برابر مجذور عددی باشد که از دو رقم سمت راست عدد تشکیل شده است.

حل: باید داشته باشیم: $\overline{abcd} = (\overline{cd})^2$

$$100(10a + b) + (10c + d) = (10c + d)^2$$

یا

$$100(10a + b) = (10c + d)(10c + d - 1)$$

$10c + d$ را برابر k می‌گیریم. روشن است $a \ne 0$ (زیرا مجذور عدد یک رقمی برابر با عدد چهار رقمی نمی‌شود)؛ بنابراین k عددی دو رقمی است و در ضمن داریم:

$$100(10a + b) = k(k - 1)$$

حاصل‌ضرب $k(k-1)$ باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد؛ بنابراین یکی از آن‌ها بر ۴ و دیگری بر ۲۵ بخش‌پذیر است. تنها یکی از این دو حالت ممکن است:

۱) $k = 25 \ , \ k - 1 = 24$

۲) $k = 76 \ , \ k - 1 = 75$

در حالت اول به دست می‌آید $10a + b = 6$ که پذیرفتنی نیست (زیرا $a \ne 0$ است).

در حالت دوم به دست می‌آید:

$$10a + b = 19 \times 3 = 57$$

یعنی $a = 5$ و $b = 7$. در ضمن روشن است که از رابطهٔ:

$$10c + d = 76$$

به‌دست می‌آید: $c = 7$ و $d = 6$.

پاسخ: ۵۷۷۶ .

مسألهٔ ۱۶. بخش درست این عبارت را پیدا کنید:

$$S_n = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

حل: روشن است که $S_n > n$. ثابت می‌کنیم $S_n < n + 1$. اگر از نابرابری کوشی برای میانگین‌های حسابی و هندسی $k + 1$ عدد:

$$1 + \frac{1}{k}, 1, 1, \cdots, 1$$

استفاده کنیم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} < \frac{1 + \frac{1}{k} + k}{k + 1} \ , \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

یا

$$\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} < 1 + \frac{1}{k(k+1)} \ , \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

اگر k را به ترتیب برابر ۱، ۲، ... و n بگیریم و نابرابری‌های حاصل را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$S_n < n + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= n + (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots$$

$$\cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = n+1-\frac{1}{n+1} < n+1$$

پس داریم: $n < S_n < n+1$، یعنی $[S_n] = n$.

مسألهٔ ۱۷. جواب‌های درست این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

حل: (a,b,c) را یکی از جواب‌های دستگاه می‌گیریم و در آغاز فرض می‌کنیم، این سه عدد مختلف باشند.

اگر فرض کنیم: $f(t) = 2t^3 - 7t^2 - 18t - 2$، به‌دست می‌آید:

$$f(a) = b \ , \ f(b) = c \ , \ f(c) = a$$

اگر u و v، عددهایی درست باشند، $f(u) - f(v)$ بر $u - v$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب $f(a) - f(b)$؛ یعنی $b - c$ بر $a - b$ و همچنین $c - a$ بر $b - c$ و $a - b$ بر $c - a$ بخش‌پذیر است. اگر m، n و k را به ترتیب خارج قسمت‌ها بگیریم، باید داشته باشیم:

$$a - b = k(c - a) = kn(b - c) = knm(a - b)$$

(k و n و m عددهایی درست‌اند). از آن‌جا $knm = 1$.

اگر k یا m و یا n برابر ۱- باشد، به دست می‌آید $a = b = c$ و اگر k، n و m برابر یک باشند، به‌دست می‌آید:

$$2a = b + c \ , \ 2c = a + b \ , \ 2b = a + c$$

که باز هم به همان نتیجهٔ $a = b = c$ می‌رسیم؛ یعنی a، b و c نمی‌توانند عددهای مختلفی باشند.

به این ترتیب، کافی است این معادله را حل کنیم:

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = x$$

یکی از ریشه‌های این معادله، برابر واحد است؛ با در اختیار داشتن یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم، دو ریشهٔ دیگر آن به‌دست می‌آید. این دو ریشه ۲ و $\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب‌های دستگاه (۱و۱و۱) و (۲و۲و۲) است.

مسألهٔ ۱۸. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \ ,$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}$$

حل: بردار با مختصات $(\sqrt{1+x_i} \ , \ \sqrt{1-x_i})$ را a_i می‌نامیم $(i = 1,2,\ldots,100)$. دستگاه مفروض، به این معناست که:

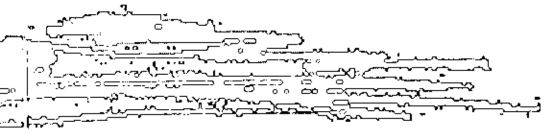
$$\sum_{i=1}^{100} a_i = (100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \ , \ 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}) \ ,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{100} a_i\right| = 100\sqrt{2} = \sum_{i=1}^{100} |a_i|$$

در نتیجه، همهٔ بردارهای a_i هم‌جهت‌اند و طولی برابر دارند؛ یعنی بر هم منطبق‌اند. به این ترتیب، دستگاه تنها یک جواب دارد:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = \frac{1}{100}$$

مسألهٔ ۱۹. چند مسافر در نقطهٔ A به قایقی سوار شدند و به طرف نقطهٔ B در جهت جریان آب رود حرکت کردند. آن‌ها نیمی از راه را پارو زدند، بعد موتور قایق را روشن کردند و ۴



ساعت بعد از آغاز حرکت به B رسیدند. اگر تمام راه را پارو می‌زدند، سفر آن‌ها ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه طول می‌کشید. در برگشتن از B به A، یک چهارم راه را پارو زدند، سپس موتور قایق را روشن کردند و ۷ ساعت بعد از آغاز حرکت خود از B، به A رسیدند. اگر در برگشتن، تمام راه را با پارو زدن می‌رفتند، بعد از چه مدت به A می‌رسیدند؟

حل: سرعت جریان آب را u کیلومتر در ساعت، سرعت قایق را با پارو در آب ساکن v_1 کیلومتر در ساعت و سرعت قایق را با موتور روشن در آب ساکن v_2 کیلومتر در ساعت، و فاصلهٔ بین A و B را s کیلومتر می‌گیریم. با توجه به صورت مسأله، به سادگی به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2(u+v_1)}+\dfrac{s}{2(u+v_2)}=4\ , \\ \dfrac{s}{u+v_1}=5\dfrac{1}{3}\ , \\ \dfrac{s}{2(v_1-u)}+\dfrac{3s}{4(v_2-u)}=7 \end{cases}$$

مسأله زمان t را از ما خواسته است که با توجه به نشانه گذاری‌ها، برابر است با $\dfrac{s}{v_1-u}$. اگر در دستگاه به جای $\dfrac{s}{v_1-u}$ مقدار t را قرار دهیم و آن را ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3t(v_1-u)=16(v_1+u) \\ 3t(v_1-u)=8(v_2+u) \\ t(v_2+3v_1-4u)=28(v_2-u) \end{cases} \qquad (1)$$

به احتمال زیاد، بیش‌تر دانش‌آموزان تا این جا به درستی پیش می‌روند؛ ولی بسیارند کسانی که در حل این دستگاه سه معادله‌ی چهار مجهولی در می‌مانند. برخی ممکن است گمان کنند، این دستگاه سرانجام به یک معادلهٔ سیّال می‌رسد و نتیجه بگیرند که مسأله نامعین است. به‌ویژه برای حذف مجهول‌های v_1 و v_2، باید عمل‌های مفصلی را انجام داد که احتمال اشتباه را زیاد می‌کند.

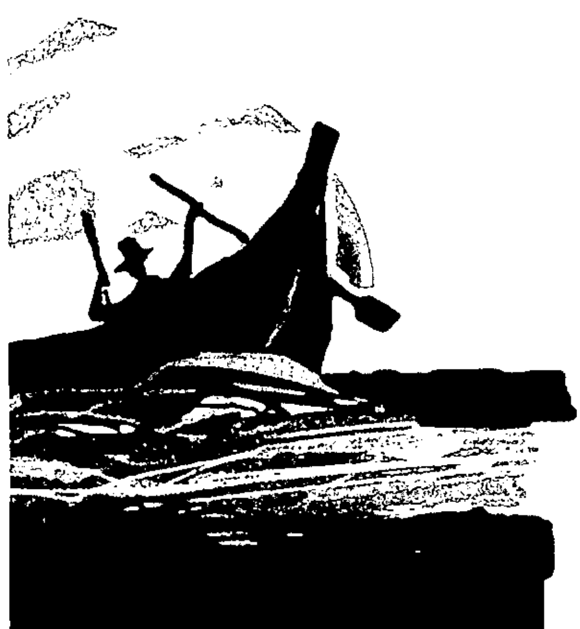
ساده‌ترین راه این است که مجهول t را حذف کنیم. معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم و معادلهٔ دوم را بر معادلهٔ سوم تقسیم می‌کنیم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$(2) \qquad \begin{cases} u=v_2-2v_1 \\ 2(v_2-u)(v_1-u)=2(v_2+u)(v_2+3v_1-4u) \end{cases}$$

که اگر u را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$6v_2^2-49v_1v_2+85v_1^2=0$$

این معادله، همگن (متجانس) است، بنابراین با فرض $v_2=kv_1$، می‌توان مقدار k و درنتیجه $\dfrac{v_2}{v_1}$ را به‌دست آورد:



$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{5}{2} \text{ یا } \frac{v_2}{v_1}=\frac{17}{3}$$

اکنون با توجه به معادلهٔ اول دستگاه (۲)، به دست می‌آید:

$$u=\frac{1}{3}v_1 \text{ یا } u=\frac{11}{3}v_1$$

با توجه به صورت مسأله، باید داشته باشیم $u < v_1$؛ بنابراین تنها جواب $u=\frac{1}{2}v_1$ است. اکنون با توجه به معادلهٔ اول دستگاه (۱)، به دست می‌آید: $t = 16$.

مسألهٔ ۲۰. این نامعادله را حل کنید:

$$4^{\sin^2 \pi x} + 3\times 4^{\cos^2 \pi x} \le 8$$

حل: این گونه نامعادله‌ها، به طور معمول منجر به یک نامعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی می‌شوند. ولی در حل نامعادلهٔ مثلثاتی، باید از یک اشتباه پرهیز کرد.

می‌دانیم جواب‌های معادلهٔ $\sin x = a \; (|a| \le 1)$ به این صورت است:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$$

(k، عددی درست است). برخی با نوعی شبیه‌سازی نادرست، برای جواب‌های نامعادلهٔ $\sin x < a \; (|a| \le 1)$ می‌نویسند:

$$x < k\pi + (-1)^k \arcsin a$$

چنین جوابی، نه تنها درست نیست، بلکه بی‌معناست. اگر برای نمونه $a=\frac{1}{2}$ بگیرید و تنها یکی از جواب‌ها را برای $k=0$ در نظر بگیرید، به بی‌معنا بودن آن پی می‌برید.

برای حل نامعادله، $y = 4^{\sin^2 \pi x}$ می‌گیریم. در این صورت، با توجه به مثبت بودن y به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$y^2 - 8y + 12 \le 0$$

که از آن، به‌دست می‌آید $2 < y \le 6$؛ بنابراین نامعادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$2 \le 4^{\sin^2 12x} \le 6$$

نابرابری سمت راست برای همهٔ مقدارهای حقیقی x برقرار است: نامعادلهٔ سمت چپ را می‌توان چنین نوشت:

$$\log_2 \le 2\sin^2 12x \log_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin^2 12x$$

$$\Rightarrow |\sin x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و جواب‌های آن چنین است (برای عدد درست k):

$$k+\frac{1}{4} \le x \le k+\frac{1}{4}$$

مسألهٔ ۲۱. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید؛ به نحوی که برای هر کدام از آن‌ها، دستگاه

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x| = y + x^2 + a \;, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

تنها یک جواب داشته باشد (a، x و y عددهایی حقیقی‌اند).

حل. پیش از همه، به این نکته توجه می‌کنیم که اگر برای مقداری از a، (x_0, y_0) جوابی از دستگاه باشد، بی‌تردید $(-x_0, y_0)$ هم جواب دستگاه است. بنابراین، برای $x \neq 0$ یا دستگاه جوابی ندارد و یا دست‌کم دو جواب دارد؛ (x_0, y_0) و $(-x_0, y_0)$. بنابراین برای این که دستگاه مفروض، تنها یک جواب داشته باشد، باید داشته باشیم $x = 0$؛ یعنی در این حالت جواب دستگاه به صورت $(0, y)$ است.

از معادلهٔ دوم دستگاه، معلوم می‌شود که این جواب تنها به یکی از دو صورت $(0,1)$ یا $(0,-1)$ می‌تواند باشد. روشن می‌کنیم برای چه مقدارهایی از a، این زوج عددها می‌توانند جواب تمامی دستگاه باشند. به سادگی دیده می‌شود که $(0,1)$ برای $a = 0$ و $(0,-1)$ برای $a = 2$، در معادلهٔ اول دستگاه صدق می‌کند.

روشن است به ازای هیچ مقدار دیگری از a، نمی‌توانیم به جوابی برسیم که با شرط‌های مسأله سازگار باشد. ولی نباید گمان کرد که حل مسأله تمام شده است. در واقع، برای این مقدارهای a، دستگاه مفروض جوابی به صورت $(0, y_0)$ دارد؛ ولی هیچ ضمانتی وجود ندارد که به جز این جواب، جواب دیگری وجود نداشته باشد.

این بخش مسأله را نباید از یاد ببریم. باید تحقیق کرد، برای این مقدارهای a، دستگاه مفروض، چند جواب دارد.

۱) حالت $a = 0$. دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: $|x| \le 1$ و $|y| \le 1$. برای همهٔ مقدارهای $|x| \le 1$ داریم:

$$2^{|x|} + |x|(1-|x|) \ge 1$$

بنابراین، اگر (x_0, y_0) جوابی از دستگاه باشد، باید داشته باشیم: $y_0 = 1$؛ زیرا از معادلهٔ اول، نتیجه می‌شود: $y_0 \ge 1$ و از معادلهٔ دوم: $y_0 \le 1$. ولی برای $y_0 = 1$، به ناچار خواهیم داشت $x_0 = 0$. به این ترتیب، تنها جواب (۱ و ۰) در دستگاه صدق می‌کند.

۲) حالت $a = 2$. در این حالت، دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|) - 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

همان‌طور که پیش از این دیدیم، جواب (۱- و ۰) با این دستگاه سازگار است؛ ولی با اندکی دقت، روشن می‌شود که زوج عددهای (۰ و ۱) و (۰ و ۱-) هم جواب‌هایی از دستگاه هستند. بنابراین، این دستگاه برای $a = 2$، دست‌کم سه جواب دارد و با شرط مسأله سازگار نیست.

پاسخ: $a = 0$.

مسألهٔ ۲۲. این معادله را حل کنید:

$$x^2 - 8[x] + 7 = 0$$

حل: $n = [x]$ می‌گیریم:

$$x^2 + 7 = 8n \;,\quad n > 0$$

روشن است که $n \le x < n+1$؛ بنابراین

$$n^2 + 7 \le x^2 + 7 < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8$$

به جای $x^2 + 7$ مقدارش $8n$ را می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

$$n^2 + 7 \le 8n < n^2 + 2n + 8$$

جواب‌های نامعادلهٔ $n^2 + 7 \le 8n$، عددهایی از بازهٔ بستهٔ $[1,7]$ است و نابرابری سمت راست برای $n < 2$ و $n > 4$ برقرار است؛ بنابراین:

$$1 \le n < 2 \;,\quad 4 < n \le 7$$

چون n عددی درست است؛ بنابراین:

$$n = 1, 5, 6, 7$$

که برای این مقدارهای n، مقدار چنین می‌شود:

$$x = 1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$$

جواب‌های منفی پذیرفتنی نیستند؛ زیرا $n=[x]$ عددی مثبت است.

مسألهٔ ۲۳. مطلوب است حل دستگاه معادله‌های:

$$x^2+y^2+z=a \;,\; x^2+y+z^2=a \;,\; x+y^2+z^2=a$$

حل: اگر معادلهٔ دوم دستگاه را از معادلهٔ اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y^2-y=z^2-z \Rightarrow (y-z)(y+z-1)=0$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$y=z$ یا $y+z=1$

به همین ترتیب، از معادله‌های دوم و سوم دستگاه به‌دست می‌آید:

$x=y$ یا $x+y=1$

بنابراین، دستگاه مفروض، به مجموعهٔ این چهار دستگاه منجر می‌شود:

$$\begin{cases} y=z \\ x+y=1 \\ x^2+y^2+z=a \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=z \\ x=y \\ x^2+y^2+z=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x+y=1 \\ x+y^2+z^2=a \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y+z=1 \\ x=y \\ x^2+y+z^2=a \end{cases}$$

معادله‌های اول و دوم دستگاه‌های سوم و چهارم را می‌توان به این ترتیب نوشت:

$$x=y \;,\; z+x=1 \;,\; z=x \;,\; y+z=1$$

که با تبدیل $(x,y,z)\rightarrow(z,x,y)$، از معادله‌های دستگاه دوم به‌دست می‌آیند. پس کافی است دستگاه دوم را حل کنیم و سپس در جواب‌ها، تبدیل‌ها را انجام دهیم.

معادلهٔ سوم، در دستگاه‌های اول و دوم، به ترتیب، به این صورت درمی‌آیند:

$$2x^2+x-a=0 \;,\; 2y^2-y+1-a=0$$

مبین این معادله‌ها به ترتیب $8a+1$ و $8a-7$ است؛ بنابراین، برای $a<\frac{1}{8}$ هیچ‌کدام از این دو دستگاه جواب ندارند. برای $-\frac{1}{8}<a<\frac{1}{8}$، دستگاه دوم جواب ندارد؛ ولی دستگاه اول دارای جواب است: (x_1,x_1,x_1) و (x_2,x_2,x_2)، که در آن

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{8a+1}}{4}$$

برای $a\geq\frac{1}{8}$ دستگاه اول دارای همان جواب‌هاست و برای دستگاه دوم جواب‌های:

$$(x_3,x_3,x_3)\;,\;(x_4,x_4,x_4)$$

به دست می‌آید، که در آن:

$$y_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4} \;,\; x_{3,4}=1-y_{3,4}=\frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4}$$

به این ترتیب، اگر فرض کنیم:

$$p=\frac{-1+\sqrt{8a+1}}{4} \;,\; q=\frac{-1-\sqrt{8a+1}}{4} \;,$$

$$r=\frac{\sqrt{8a-7}}{4} \;,\; s=\frac{1-\sqrt{8a-7}}{4} \;,$$

$$t=\frac{3-\sqrt{8a-7}}{4} \;,\; u=\frac{3+\sqrt{8a-7}}{4}$$

آن‌گاه برای $a<-\frac{1}{8}$ دستگاه جواب ندارد. و برای

$a=-\frac{1}{8}$: $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$؛

و برای $-\frac{1}{8}<a<\frac{7}{8}$: (p,p,p) و (q,q,q)؛

و برای $a=\frac{7}{s}$: (p,p,p) و (q,q,q) و $(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4})$؛

و برای $a>\frac{7}{8}$: (p,p,p) و (q,q,q) و (t,r,r) و (r,t,t) و (r,r,t) و (u,s,s) و (s,u,s) و (s,s,u).

ادامه دارد...