معادله
اتحاد و

پرویز شهریاری

این طور استدلال کنیم: اگر از جملهٔ درجه دوم معادله، به دلیل کوچکی آن نسبت به $\frac{۱}{۴}$، صرف‌نظر کنیم، مقدار تقریبی یکی از جواب‌ها به دست می‌آید. بنابراین:

$$x_۱ \approx \frac{۱}{۴} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، بنابه رابطه‌ای که بین ریشه‌ها و ضریب‌ها وجود دارد، داریم:

$$x_۱x_۲ = -\frac{۱}{۰/۰۰۰۰۰۲} = -۵\times۱۰^۵$$

و بنابراین:

$$x_۲ \approx -۲\times۱۰^۶$$

اکنون ببینیم ریشهٔ مثبت یعنی $x_۱$، با چه دقتی محاسبه شده است؟ برای این منظور اگر (۱) را از معادلهٔ اصلی کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

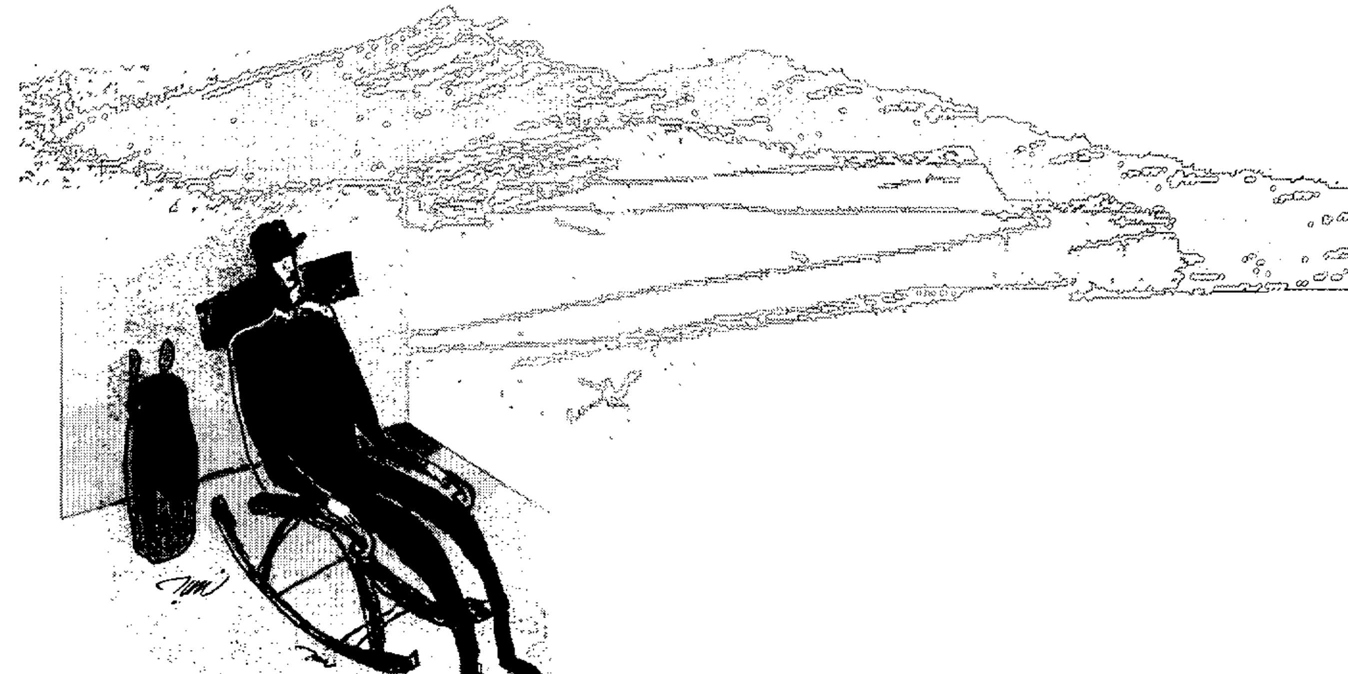
$$۰/۰۰۰۰۰۲x^۲ = ۴(x_۱ - x)$$

سمت چپ این برابری مثبت است، یعنی $x < x_۱$، بنابراین مقدار واقعی ریشه از $\frac{۱}{۴}$ کوچک‌تر است و داریم:

$$۴|x_۱ - x| < ۰/۰۰۰۰۰۲\times\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ ,$$

$$|x_۱ - x| < ۲\times۱۰^۶\times\frac{۱}{۶۴} = \frac{۱}{۱۰^۶}\times\frac{۱}{۳۲} < \frac{۱}{۱۰^۷}$$

و همان‌طور که می‌بینیم، دقت در مرز بالایی است.



مسألهٔ ۲ . مقدار تقریبی ریشهٔ این معادله را پیدا کنید .

$$۰/۰۰۰۰۰۱x + ۱ - \sqrt{۱/۰۰۰۰۱} = ۰$$

حل : باید مقدار تقریبی عدد :

$$x = \frac{\sqrt{۱/۰۰۰۰۱} - ۱}{۰/۰۰۰۰۰۱}$$

را پیدا کنیم . محاسبهٔ این کسر را با دو روش می‌توان به انجام رساند . یا به یاری رابطهٔ :

$$\sqrt{۱ + a} \approx ۱ + \frac{a}{۲}$$

و یا به یاری این تبدیل :

$$\frac{\sqrt{۰/۰۰۰۰۱} - ۱}{۰/۰۰۰۰۰۱} = \frac{۰/۰۰۰۰۱}{۰/۰۰۰۰۰۱(\sqrt{۰/۰۰۰۰۱} + ۱)} =$$

$$\frac{۱۰}{\sqrt{۱/۰۰۰۰۱} + ۱} \approx \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

مسألهٔ ۳ . از این دو عدد ، کدام بزرگ‌ترند؟

$$A = \frac{۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴}{(۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴)^۲ + ۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴^۲}$$

$$B = \frac{۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲}{(۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲)^۲ + ۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲}$$

حل : فرض می‌کنیم $\alpha = ۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴$ و $\beta = ۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲$. بنابراین عددهای مسأله به این صورت درمی‌آیند :

$$\frac{۱+\alpha}{۱+\alpha+\alpha^۲} \;,\; \frac{۱+\beta}{۱+\beta+\beta^۲}$$

چون $\alpha > \beta$ ، پس روشن است که :

$$\frac{۱+\alpha}{\alpha^۲} = \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\alpha} < \frac{۱}{\beta^۲} + \frac{۱}{\beta} = \frac{۱+\beta}{\beta^۲} \;,$$

$$\frac{\alpha^۲}{۱+\alpha} = ۱ : \left(\frac{۱+\alpha}{\alpha^۲}\right) > ۱ : \left(\frac{۱+\beta}{\beta^۲}\right) = \frac{\beta^۲}{۱+\beta}$$

$$\frac{۱+\alpha+\alpha^۲}{۱+\alpha} = ۱ + \frac{\alpha^۲}{۱+\alpha} > ۱ + \frac{\beta^۲}{۱+\beta} = \frac{۱+\beta+\beta^۲}{۱+\beta}$$

و این به معنای $\frac{۱}{B} > \frac{۱}{A}$ و در نتیجه $A<B$ است .

در آغاز تعریفی را به یاد می‌آوریم . در نظریهٔ عددها تابعی که با نماد $[x]$ نشان داده می‌شود و برای همهٔ عددهای حقیقی x معین است ، به معنای بزرگ‌ترین عدد درستی است که از x تجاوز نمی‌کند . این تابع را بخش درست x گویند یا $[x]$ می‌نامند و گاهی $E(x)$ نشان می‌دهند ؛ برای نمونه :

$$[۳/۲] = ۳ \;,\; [۰/۷] = ۰ \;,\; [-۱/۵] = -۲ \;,\; [-\sqrt{۳}] = -۲ \;,\; [۵] = ۵$$

یعنی در هر حال داریم : $[x] \le x < [x] + ۱$.

همچنین نماد $\{x\}$ را برای بخش کسری x در نظر می‌گیرند ؛ یعنی :

$$\{x\} = x - [x] \text{ یا } x = [x] + \{x\}$$

چند نمونه می‌آوریم :

$$\{۲/۳\} = ۰/۳ \;;\; \{۰/۴\} = ۰/۴ \;;\; \{-۱/۵\} = ۰/۵$$

چند مثال

مسألهٔ ۴ . درستی این اتحاد را ثابت کنید :

$$[\log_۲ x - \log_۲[x]] = [\log_۲ x] - [\log_۲[x]]$$

حل : برای $x < ۱$ مقدار $[x]$ برابر صفر یا عددی منفی می‌شود و از آن‌جا که لگاریتم صفر یا عدد منفی معنا ندارد ، پس برابری تنها برای $x \ge ۱$ معنا دارد . $x = ۲^k \times ۲^\alpha$ می‌گیریم ، که در آن k عددی درست و غیر نفی و $۰ \le \alpha < ۱$ است . داریم :

$$\log_۲ x = k + \alpha \;,\; [\log_۲ x] = k$$

چون داریم : $[x] \le x$ ، بنابراین :

$$k \le \log_۲[x] \le k + \alpha \;,\; [\log_۲[x]] = k$$

از آن‌جا :

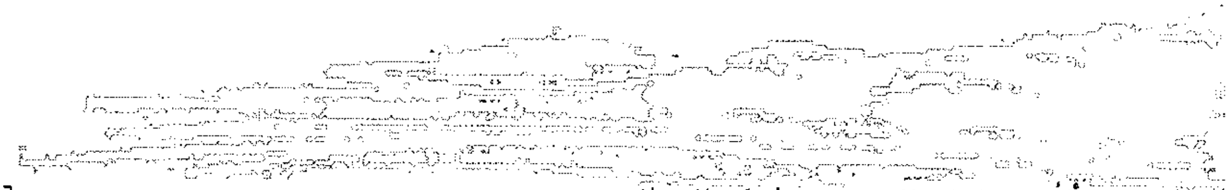
$$۰ \le \log_۲ x - \log_۲[x] \le \alpha$$

و بنابراین :

$$[\log_۲ x - \log_۲[x]] = ۰$$

$$[\log_۲ x] - [\log_۲[x]] = ۰$$

و درستی اتحاد ثابت می‌شود .



مسألهٔ ۵. $\{x\}$ را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$\left[x+\frac{3}{8}\right]+[x]=[2x]$$

حل: $x=k+\alpha$ می‌گیریم، که در آن k عددی درست و $0\le\alpha<1$ است. در این صورت برابر فرض را می‌توان این طور نوشت:

$$\left[\alpha+\frac{3}{8}\right]=[2\alpha]$$

اگر $\alpha<\frac{5}{8}$ باشد، به برابری $[2\alpha]=0$ می‌رسیم که برای $\alpha<\frac{1}{2}$ برقرار است. در حالتی که $\alpha\ge\frac{5}{8}$ باشد، به دست می‌آید: $[2\alpha]=1$، که برای $\alpha>\frac{1}{2}$ یا با توجه به شرط $\alpha\ge\frac{5}{8}$ برقرار است.

پاسخ: $\{x\}=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$.

مسألهٔ ۶. مسافری x روز در راه بود (x عددی است درست) و هر روز هم x کیلومتر را پیمود تا به مقصد رسید. اگر این مسافر هر روز ۲۰ کیلومتر می‌رفت و بعد از هر ۴۰ کیلومتر، یک روز استراحت می‌کرد، زمان مسافرت او ۳۷ روز بیشتر می‌شد. مسافر چند روز در راه بوده است؟

حل: مسافر x روز در راه بوده و هر روز هم x کیلومتر پیموده است؛ بنابراین فاصلهٔ آغاز حرکت او تا مقصد، برابر x^2 کیلومتر است.

از سوی دیگر، اگر مسافر، بعد از هر ۴۰ کیلومتر یک روز استراحت می‌کرد، تعداد روزهای استراحت او برابر $\left[\frac{x^2}{40}\right]$ می‌شد و به این معادله می‌رسیم:

$$\left(x+27-\left[\frac{x^2}{40}\right]\right)20=x^2$$

که بعد از تبدیل‌های ساده چنین می‌شود:

$$\left[\frac{x^2}{40}\right]=x+37-\frac{1}{20}x^2$$

و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x+37-\frac{1}{20}x^2\le\frac{x^2}{40}<x+38+\frac{1}{20}x^2$$

با حل این دو نامعادله، به این پاسخ‌ها می‌رسیم:

$$\frac{20+22\sqrt{10}}{3}\le x<\frac{20+4\sqrt{310}}{3}$$

مقدار سمت چپ بین ۲۹ و ۳۰ و مقدار سمت راست بین ۳۰ و ۳۱ است:

$$29/000\le x<30$$

پاسخ: $x=30$.

مسألهٔ ۷. پیاده‌ای با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. بعد از پیمودن هر ۴ کیلومتر به استراحت می‌پردازد. هر استراحت او، به جز استراحت چهارم، ۱۰ دقیقه طول می‌کشد و در توقف چهارم، یک ساعت استراحت می‌کند. اگر این مسافر، ساعت ۴ صبح راه افتاده و در ساعت ۱۲ ظهر به مقصد رسیده باشد، چه فاصله‌ای را پیموده است؟

حل: فاصله‌ای را که پیاده پیموده است، برابر x کیلومتر می‌گیریم. در این صورت

تعداد توقف‌های او برابر $\left[\frac{x}{4}\right]$ می‌شود. هر کدام از این توقف‌ها ۱۰ دقیقه (یعنی $\frac{1}{6}$ ساعت) طول کشیده است؛ به جز توقف چهارم که مدت آن یک ساعت بوده به این ترتیب، کل زمان استراحت مسافر، بر حسب ساعت، چنین است:

$$\frac{1}{6}\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)+1$$

بنابراین، زمانی که مسافر در حال حرکت بود، بر حسب ساعت، برابر است با:

$$8-\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)\frac{1}{6}-1=7\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}\right]$$

بنابراین مسافت x برابر می‌شود:

$$x=5\left(7\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}\right]\right)=35\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\left[\frac{x}{4}\right];$$

$$\left[\frac{x}{4}\right]=\frac{215-6x}{5}$$

از آن‌جا، به این نامعادله‌ها می‌رسیم:

$$\frac{215-6x}{5}\le\frac{x}{4}<\frac{215-6x}{5}+1$$

با حل این نامعادله‌ها به دست می‌آید:

$$\frac{215}{29}\le x<\frac{220}{29}\Rightarrow 7/4000\le\frac{x}{4}<7/5000$$

یعنی $x=7$ و به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{215-6x}{5}=7\Rightarrow x=30\ \text{(کیلومتر)}$$

مسألهٔ ۸. معادلهٔ $\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]^2=[2x]+2$ را حل کنید.

حل: در آغاز یک اتحاد را ثابت می‌کنیم:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x] \qquad (1)$$

هر عدد x را می‌توان به صورت $x=k+\alpha$ یا $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$ نوشت که در آن‌ها k عددی درست و $0\le\alpha<\frac{1}{2}$.

برای $x=k+\alpha$ داریم:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[k+\alpha+\frac{1}{2}\right]=k\ ;$$

$$[2x]=[2k+2\alpha]=2k\ ;\ [x]=[k+\alpha]=k$$

یعنی: $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$.

برای $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$ به دست می‌آید:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[k+1+\alpha]=k+1\ ;$$

$$[2x]=[2k+1+2\alpha]=2k+1\ ;$$

$$[x]=\left[k+\frac{1}{2}+\alpha\right]=k$$

و بنابراین $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$.

برای حل مسألهٔ اصلی، اگر از اتحاد (۱) استفاده کنیم، به این صورت درمی‌آید:

$$[x]^2-[x]-2=0$$

این، یک معادلهٔ درجه دوم نسبت به $[x]$ است که جواب‌های آن ۱- و ۲ است؛ پس:

$$2\le x<3\ ,\ -1\le x<0$$

مسألهٔ ۹. این دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1/1\\ y+[z]+\{x\}=2/2\\ z+[x]+\{y\}=3/3\end{cases}$$

حل: با توجه به اتحاد $[a]+\{a\}=a$، سه معادلهٔ دستگاه را با هم جمع می‌کنیم؛ به دست می‌آید:

$$2(x+y+z)=6/6$$

یا:

$$x+y+z=3/3 \quad (1)$$

مجموع دو معادلهٔ اول و دوم را از معادلهٔ (۱) کم می‌کنیم،

نتیجه چنین می‌شود:

$[y]+\{x\}=0$

از این جا نتیجه می‌شود: x عددی درست است و $0 \le y < 1$،
به این ترتیب معادلهٔ اول دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$x+\{z\}=1/1$

از آن جا $x=1$ و $\{z\}=0/1$ و معادلهٔ دوم دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$y+\{z\}=3/2$

درنتیجه: $[z]=2$ ، $y=0/2$.

پاسخ. $x=1$ ، $y=0/2$ ، $z=2/1$.

مسألهٔ ۱۰. معادلهٔ $\big||x|-[x]\big|=\big[|x|-[x]\big]$ را حل کنید.

حل: از آن جا که $|x| \ge x \ge [x]$ ، پس سمت چپ برابری مساوی است با $|x|-[x]$. چون $[x]$ عددی درست است، پس سمت راست معادله برابر $\big[|x|\big]-[x]$ می‌شود. به این ترتیب، معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$|x|=\big[|x|\big]$

این برابری وقتی برقرار است که $|x|$ و در نتیجه خود x عددی درست باشد.

پاسخ. هر عدد درستی جواب معادله است.

مسألهٔ ۱۱. این مسأله، یکی از مسأله‌های المپیاد سراسری روسیه در سال تحصیلی ۱۹۷۹ ـ ۱۹۸۰ است. در این دنباله، چند عدد مختلف وجود دارد؟

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\left[\frac{3^2}{1980}\right],\ldots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$

حل: جملهٔ kام دنبالهٔ مفروض را x_k می‌نامیم.

$$x_k=\left[\frac{k^2}{1980}\right]$$

یادآوری می‌کنیم که دنبالهٔ (x_k) غیرنزولی است. روشن است که:

$x_1=x_2=\ldots=x_{44}=0$

زیرا برای $k \le 44$ داریم $\frac{k^2}{1980}<1$. به همین ترتیب، به سادگی قابل تحقیق است که:

$x_{45}=x_{46}=\ldots=x_{62}=1$

زیرا برای $45 \le k \le 62$ داریم:

$$1<\frac{k^2}{1980}<2$$

جملهٔ بعد از x_{62} برابر است با ۲؛ یعنی ۱۸ جملهٔ دنباله برابر واحد است.

می‌بینیم، بین ۶۲ جملهٔ اول دنباله، تنها ۲ عدد متفاوت وجود دارد. از طرف دیگر:

$$x_{1980}=\left[\frac{1980^2}{1980}\right]=1980$$

و این، به معنای آن است که در دنبالهٔ x_k ، همهٔ عددهای طبیعی از ۰ تا ۱۹۸۰ وجود ندارد؛ یعنی «جاافتادگی‌هایی» در آن پیدا می‌شود.

این تفاضل را در نظر می‌گیریم:

$$y_k=\frac{(k+1)^2}{1980}-\frac{k^2}{1980}=\frac{2k+1}{1980}$$

اگر $y_k>1$ ، آن وقت عددهای x_k و x_{k+1} مختلف‌اند.
این وضع وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$2k+1>1980 \Rightarrow k>\frac{1979}{2}>989$$

بنابراین، همهٔ عددهای x_{990} ، x_{991} ، ... ، x_{1980} مختلف‌اند (به تعداد ۹۹۱ عدد).

در حالت $y_k<1$ یا x_k و x_{k+1} بر هم منطبق‌اند و یا یک واحد با هم فرق دارند؛ یعنی «جاافتادگی» وجود ندارد؛ چون:

$$x_{989}=\left[\frac{989^2}{1980}\right]=494$$

یعنی، در مجموعهٔ $\{x_1,x_2,\ldots,x_{989}\}$ به همهٔ عددهای درست از ۰ تا ۴۹۴ برمی‌خوریم (روی هم ۴۹۵ عدد).

به این ترتیب، تعداد عددهای مختلف در دنبالهٔ مفروض، برابر است با:

$991+495=1486$