اتحادها و معادله ها

برای دانش آموزان سال اول و دوم متوسطه

پرویز شهریاری

حساب در برخی حالت ها کارآمدتر از جبر است

اشاره: در شماره‌های قبل راجع به اتحادها و معادله‌های مختلف بحث کردیم، و مسائلی را با تشکیل معادله و حل جبری و استفاده از اتحاد حل کردیم، در ادامه مطلب مسائلی را عنوان می‌کنیم که برای آن راه‌حل هایی از حساب را آورده‌ایم که این راه‌حل ها نسبت به راه‌های جبری جالبتر است.

آنتوان چخوف در داستان «معلم خصوصی» نکته‌های جالب و خنده‌داری را آورده است؛ از جمله:

«ـ راستش را بخواهید، این یک مسألهٔ جبری است و آن را باید با «ایکس» و «ایگرگ» حل کرد.

شاگرد آهی کشید، دستش را به طرف قلم دراز کرد و گفت:

ـ ولی این مسأله، بدون جبر هم حل می‌شود.

ـ امان از نادانی و بی‌خبری...»

قدیم‌ها، در روزگاری که گاه مهربان‌تر از امروز بوده دوستداران ریاضیات، به کتاب‌های حساب شامل مسأله‌ها علاقه‌مند بودند و به آن‌ها دلبستگی داشتند. دانش‌آموزان با روش گوناگون حل حسابی مسأله‌ها آشنا می‌شدند، آموزش دقیقی می‌دیدند تا به هر اندازه که لازم است، ورزیده شوند و از توانایی‌های خود، در این زمینه، در تمامی طول زندگی استفاده می‌کردند.

در آن روزگار از «تست» و «کنکور» خبری نبود. نه کسی می‌توانست بدون درک اهمیت مسأله آن را حل کند و نه حتی به این اندیشه می‌افتاد که راهی برای «تست‌زدن» بدون این‌که به مفهوم‌های بنیانی ریاضیات پی‌ببرد، پیدا کند. ولی اکنون هم آنانی در زندگی علمی خود موفق می‌شوند که به دور از سروصداها و جنجال‌های روز، سراغ مفهوم‌ها بروند و چیزی را نفهمیده رها نکنند.

باید به جز آموزش روش‌های حل، به ذوق و احساس هنری

دانش‌آموزان هم توجه داشت؛ راه‌حل حسابی این مسأله، زیباتر از راه حل جبری آن است. البته باید گفت که راه‌حل جبری مسأله هم می‌تواند آموزنده باشد و مسیرهای تازه‌ای به روی ما بگشاید. درضمن، از راه حل هندسی هم نباید غافل بود؛ چرا که معنا و مفهوم مسأله را، به صورتی محسوس و عینی، در برابر ما می‌گذارد. منطقی‌تر و معقول‌تر، این است تا به همهٔ راه‌حل‌های ممکن یک مسأله بیندیشیم و از راه حل‌های گوناگون، بهره ببریم. در این جا، چند مسأله را با راه‌حل حسابی و گاه هندسی می‌آوریم؛ ولی سفارش می‌کنیم به راه‌حل‌های دیگر هم بیندیشید. مسأله‌ها چندان ساده نیستند و به اندیشیدن نیاز دارند.

سفارشی به دانش‌آموزان علاقه‌مند دارم که شامل چند بند می‌شود:

۱. هیچ مطلبی را نفهمیده، جلو نروید. هیچ قانونی وجود ندارد تا بدون فهم مطالب قبلی بتوان مطالب تازه را یاد گرفت؛ این از ویژگی‌های ریاضیات است. هر وقت دیدید درس ریاضی را نمی‌فهمید، به گذشته مراجعه کنید، به درس‌های گذشته. از دبیر خود هم کمک بگیرید و به هر حال تکرار می‌کنیم، از هیچ مطلبی نگذرید؛ مگر این که آن را درست فهمیده باشید.

۲. اگر ریاضیات را دوست دارید، سفارش فرد دیگری را نپذیرید که گویا ریاضیات زندگی را تأمین نمی‌کند. از حالا به اندیشهٔ تأمین زندگی نباشید و تنها به دنبال ذوق خود بروید.

۳. مسأله‌ای را که می‌خواهید حل کنید، به راه‌های گوناگون بیندیشید و به راهی که انتخاب کرده‌اید، قانع نشوید.

همین سه سفارش کافی است و به مسأله‌ها بپردازیم. اول مسأله‌ای ساده:

مسألهٔ اوّل. خریداری ۱۳۸ متر ماهوت به رنگ‌های سبز و سیاه به مبلغ ۱۰۸۰۰۰ ریال خرید. از هر رنگ چند متر ماهوت خریده است؛ به شرطی که هر متر ماهوت سبز ۱۰۰۰ ریال و هر متر ماهوت سیاه ۶۰۰ ریال محاسبه شده باشد.

حل: بیش‌تر متن‌های قدیمی‌تر، مسأله را به این صورت حل کرده‌اند:

اگر تمام ۱۳۸ متر از ماهوت سیاه بود، باید قیمت آن‌ها، مبلغ:

$$۱۳۸ \times ۶۰۰ = ۸۲۸۰۰$$

ریال می‌شد. ولی خریدار مبلغ بیش‌تری پرداخته است؛ یعنی مبلغ ۱۰۸۰۰۰ ریال که تفاوتی برابر:

$$۱۰۸۰۰۰ - ۸۲۸۰۰ = ۲۵۲۰۰$$

ریال دارد این اختلاف به این دلیل است که قیمت هر متر ماهوت سبز ۴۰۰ ریال بیش‌تر است. بنابراین ماهوت سبز به اندازهٔ

$$۲۵۲۰۰ : ۴۰۰ = ۶۳$$

متر بوده است. دیگر میزان ماهوت سیاه به سادگی پیدا می‌شود

$$۱۳۸ - ۶۳ = ۷۵ \text{ (متر)}$$

راه حل، ساده و قابل فهم است؛ ولی کم‌تر به آن توجه می‌شود. مسأله‌هایی از این گونه را، ترجیح می‌دهند با «x» و «y» حل کنند. اگر طول پارچهٔ ماهوت سبز را x و طول پارچهٔ ماهوت سیاه را y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + y = ۱۳۸ \\ ۱۰۰۰x + ۶۰۰y = ۱۰۸۰۰۰ \end{cases}$$

البته حل این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی هم مشکل نیست و ما را به همان جواب‌ها برای x و y می‌رساند؛ ولی راه‌حل «حسابی» نیاز به تجزیه و تحلیل ذهنی بیش‌تری دارد و در ضمن، ساده‌تر است و زودتر به نتیجه می‌رسد.

مسألهٔ دوم. نقطه‌های A و B در ساحل رودخانه‌ای، به فاصلهٔ ۲۰ کیلومتر از یکدیگر واقع‌اند؛ در ضمن آب رودخانه، از سوی A به سوی B جریان دارد. قایق موتوری از A به سمت B می‌رود، بعد از رسیدن به B بلافاصله برمی‌گردد و خود را به A می‌رساند و از A دوباره به سمت B می‌رود. همزمان با قایق موتوری، قایق پارویی از A به سوی B حرکت می‌کند. قایق موتوری ضمن برگشت از B، قایق پارویی را در ۴ کیلومتری A ملاقات می‌کند. قایق موتوری برای بار دومی که از A به سمت B می‌رود، در چه فاصله‌ای از A به قایق پارویی می‌رسد؟ قایق پارویی وقتی در جهت جریان آب باشد، بدون استفاده از پارو پیش می‌رود.

حل: حالت اوّل. فرض می‌کنیم، قایق موتوری وقتی در خلاف جریان آب رود حرکت می‌کند، سرعت خود را حفظ کند؛ یعنی هم در جهت جریان آب و هم در خلاف جهت جریان آب، سرعتی ثابت و یکنواخت داشته باشد (در این حالت، می‌توان

مسأله را برای حالتی در نظر گرفت که به جای قایق موتوری، یک دوچرخه‌سوار و به جای قایق پارویی، یک پیاده و فاصلهٔ A تا B جادهٔ شوسه باشد که درنتیجه، دوچرخه‌سوار همیشه سرعتی ثابت دارد). دو قایق وقتی برای نخستین‌بار به هم می‌رسند که قایق موتوری ۳۶ کیلومتر و قایق ساده ۴ کیلومتر پیموده‌اند. نسبت فاصله‌های پیموده شده برابر است با نسبت سرعت‌ها؛ یعنی قایق موتوری سرعتی ۹ برابر قایق ساده دارد.

۳۶:۴ = ۹

برای ملاقات دوم، قایق موتوری باید ۸ کیلومتر بیش‌تر در راه باشد (از نقطهٔ برخورد اوّل تا A و برگشت همین فاصله). قایق موتوری باید ۹ برابر قایق ساده و درضمن ۸ برابر آن در حرکت باشد (نسبت دو عدد برابر ۹ و تفاضل آن‌ها برابر ۸ است)؛ یعنی قایق موتوری ۹ کیلومتر و قایق ساده یک کیلومتر بعد از ملاقات اوّل باید بپیمایند تا ملاقات دوم دست دهد. به این ترتیب، در ۵ کیلومتر A دوباره به هم می‌رسند.

حالت دوم. وقتی قایق موتوری در جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ سرعت جریان آب، به سرعتش افزوده می‌شود و وقتی برخلاف جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ سرعت جریان آب، از سرعتش کم می‌شود. در این حالت، با همان سرعتی که از قایق پارویی (وقتی با هم از A حرکت کرده‌اند) دور می‌شود که در برگشت از B به طرف قایق ساده «با همان سرعت» به آن نزدیک می‌شود. درواقع، وقتی دو قایق در جهت جریان آب حرکت می‌کنند، قایق موتوری با سرعتی برابر تفاضل سرعت‌ها، از قایق ساده فاصله می‌گیرد؛ ولی وقتی از طرف دیگر، همان سرعت قایق ساده (یعنی سرعت جریان آب) به آن افزوده می‌شود، درنتیجه قایق موتوری با سرعت اختصاصی خود از قایق پارویی دور می‌شود. وقتی قایق موتوری از B به سمت قایق ساده می‌آید، با سرعتی برابر مجموع سرعت‌های دو قایق به هم نزدیک می‌شوند؛ ولی در عوض از سرعت قایق موتوری، به اندازهٔ سرعت جریان آن کم می‌شود، درنتیجه مانند این است که قایق موتوری با سرعت اختصاصی خود، به محل ملاقات نزدیک می‌شود. بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا قایق موتوری از قایق ساده دور شود و به B برسد، برابر با زمان لازم برای این که قایق موتوری، با حرکت از B، تا ملاقات قایق ساده حرکت کند؛ یعنی نسبت مساحت‌هایی که قایق موتوری در این دو حالت پیموده، برابر است با نسبت سرعت‌های آن در جهت جریان آب و در خلاف جهت جریان آب؛ نسبت این سرعت برابر است با $\frac{۲۰}{۱۶}$ یا $\frac{۵}{۴}$. فاصلهٔ نخستین ملاقات تا A برابر ۴ کیلومتر است، بنابراین ملاقات دوم دو قایق در ۵ کیلومتری A پیش می‌آید.

یادداشت. به دو نکتهٔ جالب توجه کنید: ۱. در هر دو حالت به یک نتیجه رسیدیم. ملاقات دوم در ۵ کیلومتری A پیش می‌آید. ۲. آزمایش کنید؛ اگر بخواهیم حالت دوم مسأله را به یاری جبر حل کنیم، چگونه باید معادله یا معادله‌ها را تشکیل داد؟

مسألهٔ سوم. دو بندرگاه کوچک A و B در ساحل رودخانه‌ای واقع‌اند. دو قایق، یکی از A و دیگری از B، در یک لحظه، به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. وقتی به هم می‌رسند، بسته‌های پستی را که به همراه دارند عوض می‌کنند و هر کدام به سوی بندرگاه خود برمی‌گردند. قایقی که از A حرکت کرده بود، یک ساعت بعد دوباره به A برگشت. ولی اگر قایق A، ۱۵ دقیقه زودتر از قایق B حرکت می‌کرد، آن دو قایق درست در نقطهٔ وسط A و B به هم می‌رسیدند. قایقی که از B حرکت کرده بود، بعد از چه زمانی دوباره به B برمی‌گردد.

حل: یادآوری می‌کنیم، لحظهٔ برگشت قایق به A، به طور کامل از روی لحظهٔ خروج قایق از B معین می‌شود؛ درست مثل برگشت قایق دیگر به B که از روی لحظهٔ خروج قایق A معین می‌شود. برای درک بهتر مطلب، کافی است تصور کنیم که قایق‌ها در لحظه‌ای که به هم می‌رسند، کالای پستی خود را عوض نکنند و در جهت عکس، به جای نخستین خود برگردند. به این ترتیب، قایقی که از A خارج شده است، پس از یک ساعت و ۱۵ دقیقه به جای نخستین خود برمی‌گردد؛ یعنی برای نصف راه از A تا B و برگشت آن، به یک ساعت و ۱۵ دقیقه نیاز دارد، و برای تمامی راه به ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه. بنابراین قایقی که از B خارج شده است، بعد از یک ساعت و ۳۰ دقیقه به جای نخست خود برمی‌گردد.

مسألهٔ چهارم. دو شمش با وزن‌های m کیلوگرم و n کیلوگرم و درصدهای مختلف مس در اختیار داریم. از هر شمش، تکه‌ای به وزن‌های برابر جدا کرده‌ایم و با آنچه باقی مانده است، شمش دیگری ساخته‌ایم. چه تکه‌ای با چه وزنی باید از شمش‌ها جدا

کرد تا درصد مس در شمش جدید برابر باشد؟

حل: این مسأله در بعضی از مسابقه‌ها داده شده است. بی‌تردید، این مسأله را می‌توان به یاری معادله‌ها حل کرد. درضمن، نباید از این مطلب هراس داشت که تعداد مجهول‌ها (یعنی ۳) از تعداد معادله‌ها (یعنی ۱) بیش‌تر است. نباید شگفت‌زده شد که راه‌حل کلی این مسأله، راه حل حسابی است. کلی، از این جهت که برای هر تعداد شمش می‌تواند به کار رود؛ در حالی که راه حل جبری به دشواری برمی‌خورد و همراه با محاسبه‌های مفصل است.

درواقع، این یک مسألهٔ حسابی عادی دربارهٔ «تقسیم به نسبت» است. در هریک از قیمت‌های شمش‌های تازه، باید، از شمش‌های نخستین، به نسبت $\frac{m}{n}$ وارد شود. (دربارهٔ دلیل این مطلب بیندیشید)؛ یعنی در شمش تازه به وزن m کیلوگرم، m بخش برابر از شمش نخست (که به وزن m کیلوگرم است) و n بخشی از همین گونه از شمش دوم لازم است. وزن یک بخش برابر $\frac{m}{m+n}$ کیلوگرم می‌شود. ماندهٔ شمش اول در این شمش تازه برابر است با:

$$\frac{m}{m+n}\cdot m=\frac{m^2}{m+n}$$ (کیلوگرم)

و بخش جدا شدهٔ دومی:

$$\frac{mn}{m+n}$$ (کیلوگرم)

چنین بخشی را باید از شمش اول جدا کرد

مسألهٔ پنجم. پنج مرد جوان ماهیگیر، به صید ماهی مشغول بودند. با پایان یافتن صید، اولی گفت، او بیش از دیگران صید کرده است و $\frac{1}{3}$ آن‌چه را به دست آورده است، بین دیگران به طور برابر تقسیم می‌کند. بعد معلوم شد که دومی بیش از دیگران ماهی دارد و او $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را به طور برابر بین دیگران تقسیم کرد. می‌دانیم کل صید ماهیگیران ۶ کیلوگرم و ۴۰۰ گرم بوده و بعد از این، جریان به همه برابر رسیده است. مقدار صید هر نفر را، پیش از تقسیم ماهی‌ها معین کنید.

حل: این مسأله، نمونهٔ مسأله‌های حسابی است که باید آن را از آخر حل کرد. در پایان به هر ماهیگیر یک کیلوگرم و ۲۸۰ گرم ماهی رسیده است؛ یعنی پیش از آن که نفر دوم $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را بین دیگران تقسیم کند، به اندازهٔ:

۹۲۰ گرم و ۱ کیلوگرم = $\frac{3}{2}\times$ ۲۸۰ (گرم و ۱ کیلوگرم)

ماهی بوده است. در این زمان، یعنی قبل از آن که نفر دوم $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را تقسیم کند، چهار نفر دیگر هر کدام به اندازهٔ:

۶۴۰ : ۴ = ۱۶۰ (گرم)

کم‌تر، یعنی هرکدام ۱ کیلوگرم و ۱۲۰ گرم ماهی داشته‌اند، اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، روشن می‌شود، پیش از آن که نفر اول $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را بین چهار نفر دیگر تقسیم کند، یک کیلوگرم و ۶۸۰ گرم، نفر دوم یک کیلوگرم و ۷۸۰ گرم و هریک از سه نفر دیگر، ۹۸۰ گرم ماهی داشته‌اند.

مسألهٔ ششم. در بندر برای پر کردن تانکرها سه لوله وجود دارد. از لولهٔ نخستین در هر ساعت ۳۰۰ تن نفت بیرون می‌آید، از لولهٔ دوم ساعتی ۴۰۰ تن و از لولهٔ سوم ساعتی ۵۰۰ تن. باید دو تانکر بارگیری شود. اگر بارگیری به کمک لولهٔ اول و دوم انجام شود، به نحوی که آن را به یک تانکر و لولهٔ دوم را به تانکر دیگر متصل کنیم، بارگیری دو تانکر، به ازای حداکثر سرعت در دو حالت ممکن اتصال، ۱۲ ساعت وقت می‌گیرد. درضمن، یکی از تانکرها ممکن است زودتر پر شود، که در این صورت، کار لوله‌ای که به آن متصل است، متوقف می‌شود. اگر گنجایش تانکر کوچک‌تر (یعنی حجم آن) دو برابر آنچه اکنون هست، می‌بود و بارگیری به‌وسیلهٔ لوله‌های دوم و سوم انجام می‌گرفت، در این صورت، در حالت سریع‌ترین اتصال، بارگیری ۱۴ ساعت طول می‌کشید.

هر کدام از این نفت‌کش‌ها، چند تن نفت در خود جا می‌دهند؟

حل: روشن است که باید لولهٔ با بهره‌دهی زیادتر را به تانکری وصل کرد که گنجایش بیش‌تر دارد؛ چون یکی از تانکرها در ۱۲ ساعت پر می‌شود، یا تانکر کوچک‌تر:

۱۲ × ۳۰۰ = ۳۶۰۰

تن نفت می‌گیرد و یا:

۱۲ × ۴۰۰ = ۴۸۰۰ (تن)

حالت اول ممکن نیست؛ زیرا با دو برابر کردن حجم تانکر کوچک‌تر به ۷۲۰۰ تن می‌رسیم، که برای پر کردن آن، حتی با لولهٔ سوم هم، بیش از ۱۴ ساعت وقت لازم است. بنابراین تانکر بزرگ‌تر ۴۸۰۰ تن گنجایش دارد و با لولهٔ دوم پر می‌شود و از آن گذشته با لولهٔ سوم، زودتر از ۱۴ ساعت؛ یعنی تانکر کوچک‌تر گنجایشی به این اندازه دارد:

$\frac{۱}{۲}\times ۱۴\times ۵۰۰ = ۳۵۰۰$ (تن)

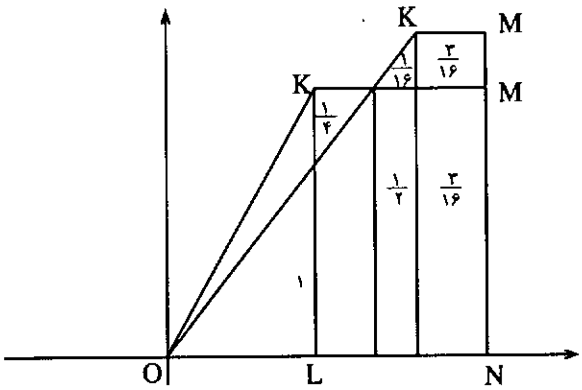
مسألهٔ هفتم. در خبری مربوط به مسابقهٔ اسکی گفته شده است، درصد تعداد عضوهای گروهی که در مسابقه شرکت کرده‌اند، در مرز از ۹۶/۸ درصد تا ۹۷/۲ درصد است. حداقل ممکن تعداد عضوهای این گروه چقدر است؟

حل: درصد کسانی که در مسابقه شرکت نمی‌کنند، از ۲/۸ درصد تا ۳/۲ درصد است. اگر یک نفر در مسابقه شرکت نکند (کم‌تر از آن ممکن نیست)، تعداد عضوهای گروه، در مرزهای: از... $۱\times\frac{۱۰۰}{۲/۸} = ۳۵/۷$ تا ... $۱\times\frac{۱۰۰}{۳/۲} = ۳۱/۲۰۰$ خواهد بود؛ یعنی کم‌ترین تعداد عضوهای گروه ۳۲ نفر است. روشن است، به ازای این تعداد عضوها، ۳/۲ درصد کم‌تر از واحد است؛ در حالی که بنابر شرط، یک نفر در مسابقه شرکت نکرده است.

مسألهٔ هشتم. این مسأله را به دو جهت در این جا آورده‌ایم؛ نخست این که در حل این مسأله، از هیچ معادله‌ای یا رابطه‌ای که بین مجهول‌ها باشد، استفاده نشده و بیش‌تر در هندسه و رسم به‌کار رفته است؛ دوم از روشی برای حل مسأله‌های مربوط به حرکت استفاده شده است که به نمایش هندسی آن‌ها مربوط می‌شود.

از نقطه‌های A و B، دو قطار به سوی یکدیگر در یک لحظه حرکت کردند. هر کدام از آن‌ها در آغاز با شتابی یکنواخت حرکت کردند (سرعت نخستین قطارها برابر صفر و شتاب حرکت در دو قطار متفاوت است)، و سپس با سرعتی یکنواخت پیش رفتند. نسبت سرعت‌های حرکت‌های یکنواخت دو قطار، برابر $\frac{۵}{۴}$ است. در چند لحظهٔ زمانی، سرعت قطارها برابر بود، ولی در آن لحظه، یکی از قطارها، فاصله‌ای برابر $\frac{۵}{۴}$ دیگری را طی می‌کرد. دو قطار در یک لحظه به نقطه‌های A و B رسیدند. چه بخشی از راه را هریک از قطارها پیموده بودند تا لحظه‌ای که دو قطار به سرعت‌های برابر رسیدند.

حل: سرعت را برای هر یک از قطارها به صورت هندسی در نظر می‌گیریم. نمایش را در دستگاه مختصاتی که سرعت را برحسب زمان برای هر قطار نشان می‌دهد، معین می‌کنیم. درضمن، فرض می‌کنیم دو قطار از یک نقطه حرکت کرده‌اند.



برای یکی از قطارها، نمایش حرکت را با OKM در نظر می‌گیریم و برای دیگری OK_1M_1 (شکل را ببینید). اندازهٔ مساحتی را که هر قطار می‌پیماید، برابر است با حاصل ضرب زمان (محور افقی) در سرعت (محور قائم)؛ یعنی برابر مساحت شکلی است که از پایین با محور زمان و از سمت چپ با سرعت نشان داده شده است.

بنابر شرط مسأله، مساحت ذوزنقه‌های OKMN و OK_1M_1N با هم برابرند؛ یعنی شکل‌های OKP و PK_1M_1M هم ارزند (مساحتی برابر دارند). بنابر شرط، مساحت OKPL برابر است با $\frac{۵}{۴}$ مساحت OPL. اگر مساحت OPL را برابر واحد بگیریم، مساحت OKP برابر $\frac{۱}{۴}$ و مساحت PK_1T برابر $\frac{۱}{۱۶}$ می‌شود؛ زیرا $K_1T = \frac{۱}{۴}PL$ (بنابر شرط سرعت حرکت یکنواخت‌ها برابر $\frac{۵}{۴}$ است؛ یعنی $MN = \frac{۵}{۴}PL$) و مثلث‌های OPL و PK_1T متشابهند. سپس از هم‌ارزی OKP و PK_1M_1M، مساحت مستطیل TK_1M_1M را پیدا می‌کنیم که برابر $\frac{۳}{۱۶}$ می‌شود. بعد مساحت دو مستطیل باقی‌مانده را به دست می‌آوریم. تا به مسیر (برابر با مساحت‌های OKMN یا OK_1M_1N) برابر است با $۲\frac{۱}{۲}$. از آن‌جا که مساحت‌های ذوزنقهٔ OKPL و مثلث OPL به ترتیب برابر است با $\frac{۵}{۴}$ را، پس در لحظهٔ برابری سرعت‌ها (در نقطهٔ P)، یکی از قطارها $\frac{۱}{۲}$ مسیر را پیموده است و دیگری $\frac{۲}{۵}$ آن را.

اسامی برندگان مسأله‌های مسابقه‌ای برهان

۱ـ معصومه ابوالفتحی / تهران
۲ـ رسول شریفی / اصفهان
۳ـ الهام رستگار / تهران

۱ـ محمد رجبی / تهران
۲ـ مرتضی نعمتی / تالش
۳ـ مریم هخامنشی / بیجار