احمد قندهاری

اتحادها و تجزیه

تعریف اتحاد: هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جمیع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ یک اتحاد است، زیرا به ازای هر مقدار عددی از x و a ، دو طرف تساوی با هم برابرند.

اتحادهای جبری

اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله‌ای): $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

اتحاد دوم(مربع تفاضل دو جمله‌ای): $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

نتایج:

الف) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

ب) $a^2 + b^2 = (a^2 - b^2) + 2ab$

ج) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

د) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab$

مسئله‌ی ۱. اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، حاصل $(2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $a = 2x\sqrt{x}$ و $b = \sqrt{3}y^2\sqrt{y}$ پس مسئله به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

بنا به نتیجه‌ی (د) داریم: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$\Rightarrow (2x\sqrt{x} + \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2 - (2x\sqrt{x} - \sqrt{3}y^2\sqrt{y})^2$$
$$= 4(2x\sqrt{x})(\sqrt{3}y^2\sqrt{y}) = 8xy^2\sqrt{3xy}$$

اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مسئله‌ی ۲. عبارت $P = x^4 + 4y^4$ را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل:

$$P = x^4 + 4y^4$$

$$P = \underbrace{x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2}_{\text{بنابر اتحاد اول}} - 4x^2y^2$$

$$P = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = \underbrace{(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2}_{\text{بنابر اتحاد مزدوج}}$$
$$\Rightarrow P = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

اتحاد چهارم (اتحاد جمله مشترک):

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مسئله‌ی ۳. عبارت $P=(x^2-1)^2-11x^2+35$ را تجزیه کنید.

حل:

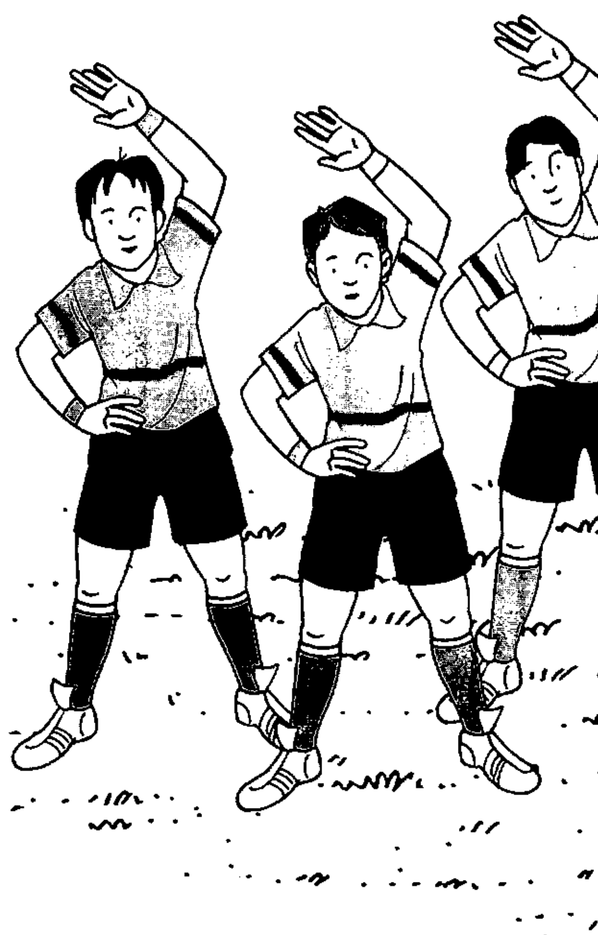
$$P=(x^2-1)^2-11x^2+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1+1)+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1)-11+35$$
$$P=(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24$$

فرض می‌کنیم $a=x^2-1$ $\qquad P=a^2-11a+24$

حال دو عدد می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۱- و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ باشد.

این دو عدد (۳-) و (۸-) هستند. پس:

$$P=(a-3)(a-8) \qquad a=x^2-1$$
$$P=(x^2-1-3)(x^2-1-8)$$
$$P=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$



اتحاد پنجم (اتحاد مربع مجموع سه جمله):

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

اتحاد ششم (اتحاد مکعب مجموع دو جمله):

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\end{cases}$$

اتحاد هفتم (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله):

$$\begin{cases}(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\end{cases}$$

مسئله‌ی ۴. اگر $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=x^3-3x$ را بیابید.

حل:

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}_{b}$$

$$x=a+b\Rightarrow x^3=(a+b)^3\Rightarrow$$
$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$x^3=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}(x)$$
$$x^3=6+3\sqrt[3]{9-8}(x)\Rightarrow x^3=6+3x\Rightarrow P=x^3-3x=6$$

مسئله‌ی ۵. اگر $x=\sqrt[6]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[6]{\sqrt{5}-2}$، آن‌گاه $P=(x^3+3x)^2$ را بیابید.

حل:

$$x=\underbrace{\sqrt[6]{\sqrt{5}+2}}_{a}-\underbrace{\sqrt[6]{\sqrt{5}-2}}_{b}$$

$$x=a-b\Rightarrow x^3=(a-b)^3\Rightarrow$$
$$x^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$
$$x^3=(\sqrt[6]{\sqrt{5}+2})^3-(\sqrt[6]{\sqrt{5}-2})^3-3\sqrt[6]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}(x)$$
$$x^3=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-3\sqrt[6]{\sqrt{5}-2x}$$
$$x^3=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-3x$$
$$\Rightarrow x^3+3x=\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}$$
$$\Rightarrow (x^3+3x)^2=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2-2\sqrt{5-4}\Rightarrow$$
$$P=(x^3+3x)^2=2\sqrt{5}-2$$

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$$

حل: عبارت‌های سمت راست را درهم ضرب می‌کنیم.

$$" \quad " = a^3+ab^2+ac^2-a^2b-a^2c-abc$$
$$+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-abc-bc^2+a^2c+b^2c+c^3-abc$$
$$-ac^2-bc^2=a^3+b^3+c^3-3abc$$

پس همواره داریم:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$$

اگر $a^3+b^3+c^3-3ab=0$ یا $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Rightarrow a=b=c \end{cases}$$

نتیجه‌ی مهم: (اتحاد اولر یا لاگرانژ)

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مسئله‌ی ۷. حاصل کسر $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$ را بیابید.

حل: عبارت مخرج را ساده می‌کنیم

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$=x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz-z^2+x^2-2xz$$
$$=2x^2=2y^2+2z^2-2(xy+yz+xz)$$
$$\text{کسر}=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}=\frac{x+y+z}{2}$$

مسئله‌ی ۸. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=\sqrt{2(2-\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$

حل:

$$P=\sqrt[4]{4(2-\sqrt{2})^2}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$
$$P=\sqrt[4]{4(4+2-4\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[4]{4(6-4\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}$$
$$P=\sqrt[4]{8(3-2\sqrt{2})}.\sqrt[4]{2(3+2\sqrt{2})}=\sqrt[4]{16(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$
$$\Rightarrow P=\sqrt[4]{16(9-8)}=\sqrt[4]{16(1)}=2$$

مسئله‌ی ۸. اگر $n\in N$ و n عددی فرد باشد و داشته باشیم $a^3+b^3+c^3=a+b+c=0$، آن‌گاه حاصل عبارت $P=a^n+b^n+c^n$ را بیابید.

حل:

داریم: $a+b+c=0 \xrightarrow{\text{بنا بر اتحاد اولر}} a^3+b^3+c^3=3abc$

داریم: $a^3+b^3+c^3=0\Rightarrow 3abc=0\Rightarrow abc=0$

$\Rightarrow a=0$ یا $b=0$ یا $c=0$

فرض می‌کنیم $c=0$. در نتیجه، از رابطه‌ی $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود: $a+b=0$. بنابراین: $a=-b$.

$$P=a^n+b^n+c^n=(-b)^n+b^n+0=-b^n+b^n+0=0$$
$$\Rightarrow P=0$$

مسئله‌ی ۹. حاصل عبارت $P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ را بیابید.

حل:

فرض می‌کنیم: $z=c-a$ و $y=b-c$ و $x=a-b$

$$x+y+z=a-b+b-c+c-a=0$$
$$\Rightarrow x+y+z=0 \;\text{بنا بر اتحاد اولر}\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$
$$\Rightarrow P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$$

آزمون

آزمون ۱. اگر $x^2+x+1=0$، آن‌گاه $(x^3+\frac{1}{x^3})$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۲- ج) ۸ د) ۸-

حل: گزینه‌ی الف.

$x^2+x+1=0\Rightarrow$ بر $x\neq 0$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=0\Rightarrow$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم $x+\frac{1}{x}=-1$

هر تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای جمیع مقادیر متغیرهای تعریف شده، در دو طرف تساوی همواره برقرار باشد، اتحاد نامیده می‌شود

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x)(\frac{1}{x})(\underbrace{x + \frac{1}{x}}_{-1}) = -1$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} - 3 = -1 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$$

آزمون ۲. اگر $x^2 + x + 1 = 0$، آن‌گاه $(x^6 + \frac{1}{x^6})$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی د.

دو طرف را $x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم $\Leftarrow x^2 + x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم $x - \frac{1}{x} = -1$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x(\frac{1}{x})(\underbrace{x - \frac{1}{x}}_{-1}) = -1$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} + 3 = -1 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = -4$$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} - 2 = 16 \Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$$

آزمون ۳. اگر $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -\sqrt[3]{z}$، آن‌گاه $(x+y+z)^6$ برابر است با:

الف) $81x^2y^2z^2$ ب) $729xyz$

ج) $729x^2y^2z^2$ د) $-81x^2y^2z^2$

حل: گزینه‌ی ج.

$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ بنا به اتحاد اولر $\Leftarrow$

دو طرف را به توان ۶ می‌رسانیم: $x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz}$

$$(x+y+z)^6 = 3^6(x^2y^2z^2) = 729x^2y^2z^2$$

آزمون ۴. اگر $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$، آن‌گاه حاصل

عبارت $\frac{a^n + b^n}{a^6 + b^6}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۱۶ د) ۱۲۸

حل: گزینه‌ی الف.

دو طرف فرض را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = b = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n + b^n}{a^4 + b^4} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

آزمون ۵. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^{n+4}(3-2\sqrt{2})^2 \quad (n \in N)$$

الف) ۴ ب) ۱ ج) $4\sqrt{2}$ د) $16\sqrt{2}$

حل: گزینه‌ی ب.

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^{n+4}(3-2\sqrt{2})^2$$

$$= \underbrace{(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n}(\sqrt{2}-1)^4(3-2\sqrt{2})^2$$

$$= \left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right]^n \times \left[(\sqrt{2}+1)^2\right]^2(3-2\sqrt{2})^2$$

$$= (2-1)^n \times (3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2 = \left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^2$$

$$= 1 \times (9-8)^2 = 1 \times 1 = 1$$

آزمون ۶. اگر $a + b = 3$، آن‌گاه حاصل عبارت $P = a(a^2+a+1) + b(b^2+b+1) + ab(3a+3b+2)$ کدام است؟

الف) ۱۸ ب) ۲۷ ج) ۳۹ د) ۴۹

حل: گزینه‌ی ج.

$$P = a^3 + a^2 + a + b^3 + b^2 + b + 3a^2b + 3ab^2 + 2ab$$

$$P = (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) + (a^2 + b^2 + 2ab) + (a + b)$$

$$P = (a^3 + b^3) + (a+b)^2 + (a+b) = (3)^3 + (3)^2 + 3$$

$$= 27 + 9 + 3 = 39$$