آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد؟

دکتر احمد شرف‌الدین

در سطور زیر ثابت می‌کنیم که تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است. مطالعهٔ این مقاله نه‌تنها برای دانش‌آموزان مفید است که برای دبیران و دانشجویان نیز مفید است.

ابتدا مقدمات لازم برای اثبات حکم مورد نظر را ذکر می‌کنیم و سپس به اثبات مطلب می‌پردازیم.

۱. قضیّه. معادلهٔ

$$(۱) \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن n عدد صحیح بزرگتر یا مساوی یک است، دارای n ریشه است.

در این قضیه اعداد مختلطی که در معادله (۱) صدق می‌کنند جواب محسوب می‌شوند و همچنین هر ریشه مکرر از مرتبه p، به‌عنوان p ریشه محسوب می‌شوند.

مثال ۱. معادله درجهٔ دوم $x^2 - 5x + 6 = 0$ دارای دو جواب حقیقی $x = 2, 3$ است. معادله درجهٔ دوم $x^2 - 3x + 4 = 0$ دارای دو جواب مختلط $x = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$ است. معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ دارای دو جواب مساوی $x = 1$ است. معادله اخیر به‌صورت $(x-1)^2 = 1$ است. منظور ما از این مثال آن است که بگوییم یک معادله درجه دوم همواره دارای دو جواب است.

مثال ۲. معادلهٔ درجه سوم $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ دارای سه جواب حقیقی $x = -1, 2, 3$ است. معادلهٔ درجه سوم $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ دارای یک جواب حقیقی $x = 1$ و دو جواب مختلط $x = -1 \pm \sqrt{-4}$ است. معادلهٔ $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ دارای یک جواب ساده $x = 2$ و دو جواب مساوی $x = 1$ است. معادلهٔ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ دارای سه جواب مساوی $x = -1$ است (جواب مکرر از مرتبهٔ ۳). منظور ما از این مثال آن است که توضیح دهیم یک معادلهٔ درجه سوم همواره دارای سه جواب است.

۲. قضیّه. یک شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

دارای بی‌نهایت جواب باشد، آن است که ضرایب مساوی صفر باشند:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0$$

۳. تعریف تابع متناوب. تابع f را متناوب با دوره تناوب T $(T \neq 0)$ می‌نامند، اگر $x \in \mathrm{Dom} f$ آنگاه

$$\begin{cases} x \pm T \in \mathrm{Dom}\, f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$ و

۴. قضیّه. هرگاه تابع f متناوب با دوره تناوب T باشد، به ازای هر عدد صحیح مثبت یا منفی n چنین داریم:

$$f(x + nt) = f(x)$$

۵. تعریف تابع جبری. بنا به تعریف، y تابعی جبری از x است اگر در معادلهٔ جبری تجزیه ناپذیری به‌صورت:

$$(2)\quad P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

صدق کند. در معادلهٔ بالا، n عدد است صحیح و نسبت و ضریبهای $p_n(x)$، $P_{n-1}(x)$،...، $P_1(x)$، $P_0(x)$ چند جمله‌ایهایی از x می‌باشند.

مثال ۱. $y=\sqrt{x}$ ، $(x>0)$ یک تابع جبری را تعریف می‌کند که عضوهای (x,y) آن در معادله تجزیه‌ناپذیر زیر صدق می‌کنند:

$$y^2-x=0$$

مثال ۲. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ $(x>0)$ یک تابع جبری را تعریف می‌کند که عضوهای (x,y) آن در معادله تجزیه ناپذیر زیر صدق می‌کنند:

$$(x-1)y^2+2xy-x^2=0$$

تابع جبری را می‌توان به‌صورت ساده زیر نیز تعریف کرد:

تابع جبری تابعی است که از تعدادی متناهی عمل جبری بر تابع همانی (یعنی تابع x) و تابع ثابت حاصل شود. (اعمال جبری شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان رساندن، و ریشه گرفتن می‌شوند.)

٦. تعریف تابع غیرجبری. تابعی که جبری نباشد تابع غیر جبری یا متعالی نامیده می‌شود. تابعهای مثلثاتی و لگاریتمی از جمله تابعهای غیر جبری‌اند.

تابع $\sin x$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

تابع بالا با اعمال جبری بر تابع همانی و تابع ثابت حاصل شده است. اما باید توجه کرد که تعداد این اعمال متناهی نیست. لذا تابع $\sin x$ یک تابع جبری نیست.

۷. حکم. تابع ثابت تنها تابع جبری متناوب است.

برهان. تابع جبری

$$(3)\quad y=f(x)$$

را درنظر می‌گیریم. بنابر شمارهٔ (۵)، این تابع در معادلهٔ جبری تجزیه ناپذیری به‌صورت (۲) که در شمارهٔ (۵) ذکر شد، صدق می‌کند.

اکنون مقدار دلخواه y_0 متعلق به برد تابع (۳) را درنظر می‌گیریم. مقدار y_0 را در معادلهٔ (۲)، به‌جای y می‌گذاریم، معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(4)\quad P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ جبری بر حسب x است. اگر درجه این معادله k باشد آنگاه بنا بر قضیّه (۱)، تعداد جوابهای آن در حالت کلی برابر k است.

جوابهای معادله:

$$(5)\quad y_0=f(x)$$

در معادله (۴) صدق می‌کنند پس تعداد جوابهای معادلهٔ (۵) متناهی است.

اکنون فرض می‌کنیم که تابع جبری (۳) متناوب باشد. می‌گوییم حداقل یک مقدار x_0 وجود دارد به‌طوری که $y_0=f(x_0)$ باشد. اگر دورهٔ تناوب تابع f برابر T باشد، آنگاه چنین داریم:

$$f(x_0+xt)=f(x_0)$$

n عددی صحیح است (مثبت یا منفی). پس اگر تابع $f(x)$ متناوب باشد معادلهٔ (۵) دارای بی‌نهایت جواب است. این نتیجه با نتیجه‌ای که قبلاً به‌دست آوردیم متناقض است. پس تابع جبری درحالت کلی متناوب نیست.

حالت خاص. اگر تابع $f(x)$ ثابت و برابر C می‌باشند چنین داریم:

$$(6)\quad y_0=c$$

زیرا y_0 متعلق به برد تابع اختیار شده است. چون در معادله (٦)، ضریبهای توانهای مختلف x صفرند و جمله ثابت یعنی: (y_0-c) نیز صفر است پس بنابر قضیّهٔ (۲)، این معادله دارای بی‌نهایت جواب است. لذا تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است.

تابع ثابت دارای بی‌نهایت دورهٔ تناوب است. این تابع دارای کوچکترین دورهٔ تناوب نیست.