

آیا استدلال تمثیلی، یک استدلال ریاضی است؟



آیا بدون محاسبه کردن می‌توانید برابری زیر را کامل کنید؟
 $12345679 \times 27 = \dots$

درستی پاسخ خودتان را با استفاده از ماشین حساب تحقیق کنید. بسیاری از نتیجه‌گیریهای علمی و غیرعلمی که بنا بر تمثیل بیان می‌شوند، نادرستند؛ زیرا روش استدلال تمثیلی، یک روش علمی نیست. بنابراین استفاده از این روش، برای اثبات درستی یک مسأله پذیرفته نیست. با وجود این، دیده می‌شود که تمثیل در طرز تفکر، در سخن گفتن روزمره، نتیجه‌گیریهای متعارف و نیز در تعبیرات هنری و در عالیترین دستاوردهای علمی ما نفوذ دارد و در ترازهای مختلف به کار می‌رود. به کمک تمثیل ممکن است راه‌حلهای مناسبی را برای حل یک مسأله کشف کرد. حتی می‌توان توسط آن، گزاره‌های جدید را بیان و سپس درستی آنها را بررسی کرد. به همین دلیل، نباید از هیچ نوع تمثیل غافل بمانیم.

فعالیت (۱)

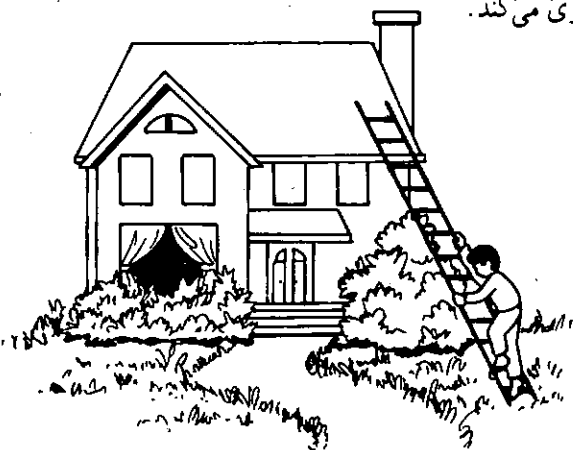
هدف ما از این فعالیت، استفاده از تمثیل برای درک بهتر ضرب اعداد صحیح، بخصوص ضرب اعداد مثبت در منفی و منفی در منفی است. ابتدا قراردادهای زیر را می‌پذیریم:

قرارداد اول: کلمه قبل را با نماد «-» و کلمه بعد را با نماد «+» نمایش می‌دهیم. برای مثال، ۳ ثابته قبل، یعنی ۳- و ۳ ثابته بعد، یعنی ۳+.

قرارداد دوم: از پله بالا رفتن را با نماد «+» و از پله پایین آمدن را با نماد «-» نمایش می‌دهیم. برای مثال، ۲ پله بالا رفت؛ یعنی ۲+ و ۲ پله پایین آمد؛ یعنی ۲-.

قرارداد سوم: یک دانش‌آموز به نام علی می‌تواند در هر ثابته ۲ پله بالا برود.

علی دانش‌آموز سال اول دبستان، در حیاط منزلشان با نردبان بازی می‌کند.



● علیرضا عین‌اللهی

تمثیل "Analogy" در لغت، به معنای مثل آوردن، نمایش دادن، نمایندگی و... است. اما از دیدگاه منطق کلاسیک، تمثیل به معنای «از جزئی به جزئی دیگر پی بردن است.» به عبارت دیگر، توسط تمثیل بین مفاهیم گوناگون، به نوعی شباهت و یکسانی دست می‌یابیم.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱): عدد (2^5) از عدد (5^2) بزرگتر است. از راه مشابهت نتیجه می‌شود که عدد (3^5) از عدد (5^3) نیز بزرگتر است.

مثال (۲): می‌دانیم که گزاره «هر انسان یک سر دارد» درست است و چون «فردوسی یک انسان است» پس از راه مشابهت نتیجه می‌شود که «فردوسی یک سر دارد».

مثال (۳): با توجه به درست بودن دو گزاره «هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است» و «مربع نوع خاصی از مستطیل است» می‌توان نتیجه گرفت که: «مربع یک متوازی‌الاضلاع است».

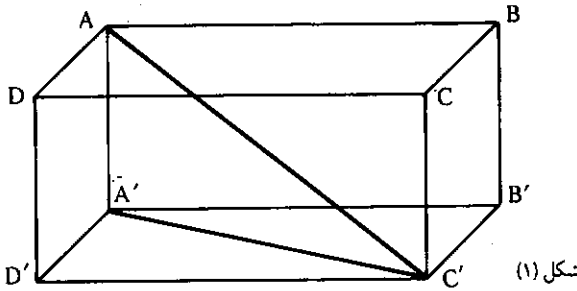
مثال (۴): یک مربع با یک مکعب مشابه است. چون مساحت یک مربع به ضلع a برابر (a^2) است، از این مشابهت می‌توانید نتیجه بگیرید که حجم یک مکعب به ضلع a برابر (a^3) است.

مثال (۵): لطفاً درستی برابری زیر را توسط ماشین حساب بررسی کنید:

$$12345679 \times 9 = 111111111$$

$$12345679 \times 18 = 222222222$$

(شکل (۱) را ببینید.)



محسن همراه با نگاه کردن به شکل رسم شده، به دنبال راه حلی برای حل مسأله داده شده بود. همچنین خطوطی فرضی در شکل مکعب رسم و در مورد اشکال پدید آمده فکر می کرد. در همین زمان، با رسم پاره خط $A'C'$ توجه محسن به مثلث $AA'C'$ جلب شد. با شباهت سازی بین شکل مکعب مستطیل رسم شده با کلاس درس، محسن متوجه شد که مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائمه است. (چگونه؟) بنابراین با توجه به شناختی که محسن از مثلث قائم الزاویه داشت، احساس کرد که می تواند قطر مکعب (یعنی AC') را بیابد؛ ولی با کمی دقت، دریافت که این کار میسر نیست؛ چرا که در این مثلث (یعنی $AA'C'$) تنها یک ضلع AA' معلوم است.

پیش از ادامه بحث، از شما می خواهیم سعی کنید تمثیلهایی را که محسن از آنها استفاده کرده است، بیابید و توضیح دهید. پس از این هدف محسن، حل مسأله جدید و آن هم یافتن طول پاره خط $A'C'$ بود. اینک برای حل این مسأله جدید، باز هم محسن می تواند از استدلال تمثیل استفاده کند.

آیا مثلث قائم الزاویه ای که شامل پاره خط $A'C'$ باشد، در شکل رسم شده وجود دارد؟ سرانجام محسن طول $A'C'$ را چگونه به دست می آورد؟

فعالیت (۳)

با نگاهی دقیق و متفکرانه به سخنان گهروار پروردگار در قرآن کریم، درمی یابیم که خداوند بسیاری از نکات را توسط استدلال تمثیلی برای ما روشن ساخته است. از جمله در سوره «نور» آیه ۳۵ خداوند تعالی می فرماید: *اللَّهُ نُورُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ...*

علامه طباطبایی در کتاب «تفسیر المیزان» می فرماید که مراد از این جمله، این است: «خداوند سبحان نوری است که به وسیله او، آسمانها و زمین ظهور یافته اند.» و نیز می فرماید: «مراد به نور در جمله، نور خداست که از آن نور عالم منشأ می گیرد؛ نوری که هر چیزی به وسیله آن روشن می شود، با وجود هر چیزی مساوی

I. اگر علی بخواهد از نردبان بالا برود، در این صورت، بعد از ۲ ثانیه، چند پله بالا می رود؟ آیا می توان نوشت؟

$$(+3) \times (+2) = (+6)$$

II. فرض کنید علی از نردبان بالا می رود. به نظر شما ۲ ثانیه قبل، علی چند پله پایین بوده است؟ آیا می توان نوشت؟

$$(-3) \times (+2) = (-6)$$

III. اگر علی بخواهد از نردبان پایین بیاید، در این صورت ۲ ثانیه بعد، او چند پله پایین آمده است؟ آیا می توان نوشت؟

$$(+3) \times (-2) = (-6)$$

IV. فرض کنید علی از نردبان پایین می رود. به نظر شما ۲ ثانیه قبل، علی چند پله بالا بوده است؟ آیا می توان نوشت؟

$$(-3) \times (-2) = (+6)$$

در توضیح بیان شده در (I) توجه دارید که:

$+3$ یعنی ۲ ثانیه بعد

$+2$ یعنی علی در یک ثانیه ۲ پله بالا می رود

در این صورت، از ضرب این دو عدد صحیح، می توانیم تعداد پله هایی را که علی بعد از سه ثانیه بالا می رود، به دست آوریم؛ بنابراین:

$+6$ یعنی تعداد پله هایی که بعد از ۳ ثانیه بالا می رود.

اکنون از شما می خواهیم که برابری موجود در قسمتهای (II)، (III) و (IV) را توضیح دهید.

فعالیت (۲)

هدف ما از این فعالیت، استفاده از تمثیل در کشف راه حل های مناسب برای حل مسائل است. قرارداد زیر را می پذیریم؛ قرارداد: محسن دانش آموز دوره راهنمایی تحصیلی است. وی مثلث قائم الزاویه و کار با آن را دقیقاً می شناسد. همچنین با معلوم بودن دو ضلع از اضلاع مثلث قائم الزاویه، می تواند ضلع سوم را حساب کند.

یکی از روزهای هفته در کلاس ریاضی، معلم ریاضی، مسأله زیر را پای تخته برای بچه ها نوشت:

«مسأله: قطر یک مکعب مستطیل به ابعاد ۳، ۴ و ۵ را به دست آورید.»

معلم از بچه ها خواست که با استفاده از معلومات ریاضی شان که تا به حال کسب کرده اند، به حل این مسأله بپردازند. محسن برای حل این مسأله، ابتدا توسط خط کش دقیقی، یک مکعب مستطیل را رسم کرد و یکی از قطرهای آن را نیز کشید.

$$\frac{42}{4} = \text{جواب} \Rightarrow 6 \times 7 = 42 \Rightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^2$$

به روش متعارف، حاصل توانهای $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ و $\left(\frac{6}{7}\right)^2$ را به دست آورده و با جوابهای دانش آموز مقایسه کنید. آیا جوابهایی که دانش آموز به دست آورده است، صحیح است؟ آیا به روش تمثیل می توانید حاصل $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ را به دست آورید؟ درستی پاسخ خود را به روش متعارف محاسبه کنسرها بررسی کنید.

۵. آیا مشابهتی بین روشهای معلم و دانش آموز در سؤالهای (۳) و (۴) وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. آیا می توانید بگویید کدام یک از اعداد $\sqrt{4}$ و $\sqrt[5]{7}$ بزرگتر است؟ با داشتن یک ماشین حساب تقریباً مجهز، می توانید به راحتی به این سؤال پاسخ دهید. ما برای پاسخ به این سؤال، ابتدا هر دو عدد را به توان (۱۰) می رسانیم، خواهیم داشت: $32 = 2^5 = (\sqrt{2})^{10}$ و $49 = 7^2 = (\sqrt[5]{7})^{10}$ و چون $49 > 32$ ، ما نتیجه می گیریم که $\sqrt[5]{7} > \sqrt{2}$.

اینک از طریق مشابهت، بزرگترین عدد را از بین اعداد داده شده در هر قسمت، به دست آورید:

آ. $(\sqrt{2})$ و $(\sqrt[5]{5})$ ب. $(\sqrt[3]{3})$ و $(\sqrt{5})$ ج. $(\sqrt[7]{7})$ و $(\sqrt[4]{4})$

۷. خداوند در آیه (۵) از سوره «جمعه» و «صف» حال آنان را که تحمل (علم) تورات کرده و خلاف آن عمل نمودند، در مثل به حماری تشبیه می کند. از شما می خواهیم که این استدلال تمثیل را که خداوند بیان فرموده است، بیشتر توضیح دهید.

۸. یک نتیجه گیری علمی (غیرعلمی) نادرست که بر پایه استدلال تمثیل باشد، مثال بزنید.

۹. آیا روش استدلال تمثیل، یک روش علمی است؟ می دانید که $2^5 > 3^3$ (چرا؟) آیا از روش مشابهت می توان نتیجه گرفت: $3^3 > 3! ?$ (چرا؟)

۱۰. آیا این جمله که «توسط تمثیل می توان گزاره های جدید را بیان و سپس درستی آنها را بررسی کرد.» در فعالیت (۲) دیده می شود؟ توضیح دهید.

۱۱. یک دانش آموز از درستی برابری:

$$987654321 \times 9 = 8888888889$$

با استفاده از استدلال تمثیل، برابری زیر را نتیجه می گیرد:

$$987654321 \times 18 = 7777777778$$

آیا نتیجه گیری این دانش آموز صحیح است؟ چرا؟

است و عبارت آخری آن است و این همان رحمت عامه الهیه است. «در جای دیگر می فرماید: «مراد به آن نور، نوری است خاص که خدای تعالی آن را تنها به مؤمنین اختصاص داده و آن، به طوری که از کلام استفاده می شود، حقیقت ایمان است.» همچنین خداوند در ادامه آیه (۳۵) می فرماید: «مثل نور کمشکوة فیها مصباح المصباح فی زجاجة الزجاجة کأنها کوكب درى...» بنابراین پروردگار در ادامه آیه شریفه نور، خود را توصیف می کند: بدین صورت که: «مثل نور او، چون محفظه ای است که در آن چراغی باشد و چراغ در شیشه ای؛ شیشه هایی که گویی ستاره ای است درخشان...»

با مراجعه به قرآن و تفسیر المیزان، از شما می خواهیم تا کلیه استدلالهای تمثیل به کار رفته در این آیه را استخراج کنید.

۱-۲) سؤالیهای دوره ای

۱. یک دانش آموز، راه حل مسأله زیر را می داند:
مسأله: می خواهیم ۱۵ متر پارچه را بین سه خیاط تقسیم کنیم. به هر یک چند متر پارچه می رسد؟

از دانش آموز می خواهیم که مسأله زیر را حل کند:
مسأله: می خواهیم ۱۵ شیشه شیر را بین سه خانواده به طور مساوی تقسیم کنیم، به هر خانواده چند شیشه شیر می رسد؟

آیا دانش آموز ما از استدلال تمثیل برای حل این مسأله می تواند استفاده کند؟ چگونه آن را توضیح دهید.

۲. آیا گزاره «کبوتر بال دارد و پرواز می کند» درست است؟ آیا گزاره «مرغ بال دارد» درست است؟ آیا از این جا می توان نتیجه گرفت که مرغ پرواز می کند؟ آیا استدلال تمثیل در این جا مؤثر است؟

۳. یک معلم برای محاسبه اعداد 35^2 و 65^2 به صورت زیر عمل کرده است:

$$35^2 = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow \text{جواب} = 1225$$

$$65^2 = 6 \times 7 = 42 \Rightarrow \text{جواب} = 4225$$

آیا جوابهایی که معلم به دست آورده است، صحیح می باشد؟ آیا از راه مشابهت می توانید حاصل عدد 75^2 را به دست آورید؟ درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

۴. یک دانش آموز برای محاسبه اعداد $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ و $\left(\frac{6}{7}\right)^2$ به صورت زیر عمل می کند:

$$\frac{12}{4} = \text{جواب} \Rightarrow 3 \times 4 = 12 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2$$