● یدا... ایلخانی پور

آهنگ تغییر

(برای دانش آموزان سال سوم دبیرستان رشته ریاضی)

می‌دانید که چگونه از مشتق برای تعیین شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه استفاده می‌شود. اکنون مورد استعمال دیگری از مشتق را در نظر می‌گیریم و آن، تعیین میزان یا آهنگ تغییر یک متغیر نسبت به متغیر دیگری است، که متغیر دیگر، متغیر مستقل می‌باشد.

این میزانهای تغییر، یا آهنگ تغییر را می‌توان در مباحث مختلف، از جمله میزان رشد جمعیت، میزان تولید، افزایش یا کاهش سطح و حجم، سرعت، شتاب و غیره به کاربرد.

الف) آهنگ متوسط تغییر

فرض کنیم مکان یک جسم متحرکی مانند M در هر زمان t، به صورت یکنواخت، تابع مشتق‌پذیر $S = f(t)$ باشد. بنابراین در لحظهٔ t_1، مکان جسم $S_1 = f(t_1)$ است و در لحظهٔ t_2، مکان جسم $S_2 = f(t_2)$ است. آهنگ متوسط تغییر مکان جسم M در فاصلهٔ زمانی t_1 تا t_2، همان سرعت متوسط M است و برابر است با:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

که

$$\Delta S = S_2 - S_1 \ , \ \Delta t = t_2 - t_1$$

ΔS را تغییر مکان و Δt را تغییر زمان می‌نامیم. پس نسبت تغییرات مکان جسم M به تغییرات زمان، در بازهٔ زمانی $[t_1 , t_2]$ برابر است با آهنگ متوسط تغییر مکان جسم M نسبت به تغییر زمان t.

تعریف: اگر $y = f(x)$ معادله‌ای باشد که در هر لحظه، رابطهٔ تغییرات y وابسته به تغییرات x را نشان دهد، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ را آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x دربازهٔ $[x, x+\Delta x]$ می‌نامیم. (نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل)

(تذکر: اگر x زمان و y مکان یک جسم متحرک باشد، این آهنگ تغییر، سرعت متوسط جسم نیز نامیده می‌شود.)

مثال: غلظت یک دارو در خون یک بیمار، پس از ۱۰ دقیقه، ۲ میلیگرم و پس از ۴۰ دقیقه، ۵۲ میلیگرم در دقیقه بوده است. آهنگ متوسط تغییر غلظت خون بیمار دربازهٔ [۴۰ , ۱۰]، چه قدر است؟

حل: $\Delta y = ۵۲ - ۲ = ۵۰ \ , \ \Delta x = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۵۰}{۳۰} = ۱/۶۶ \frac{mg}{m}$ میلیگرم در دقیقه

مثال: آهنگ تغییر متوسط درجهٔ حرارت سانتیگراد به درجهٔ حرارت فارنهایت را به دست آورید؛ در صورتی که $C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ باشد.

حل: کافی است $\frac{\Delta C}{\Delta F}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۹}(F + \Delta F - ۳۲) - \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)}{\Delta F}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۹}(F + \Delta F - ۳۲ - F + ۳۲)}{\Delta F}$$

$$= \frac{۵}{۹} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta F} = \frac{۵}{۹}$$

نکته: اگر $y = f(x)$ معادلهٔ مسیر یک متحرک باشد، وقتی x به اندازهٔ Δx تغییر کند، y به اندازهٔ $f(x+\Delta x) - f(x)$ تغییر می‌کند. این تغییر Δy را تغییر واقعی f می‌نامند، که این تغییر واقعی، وقتی Δx خیلی کوچک باشد، تقریباً با $f'(x)$، یعنی مشتق f در نقطهٔ x برابر است.

ب) آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر

تعریف: اگر $y = f(t)$ معادلهٔ تغییر یک کمیت در هر لحظهٔ t باشد، نسبت تغییرات y (یا تغییرات f) در واحد زمان، برابر است با آهنگ آنی تغییر آن کمیّت.

یعنی: $\frac{\Delta y}{۱} = \frac{f(t + ۱) - f(t)}{۱}$

چون $۱ = \Delta t$ کوچک است، مقدار Δy تقریباً با $f'(t)$ برابر است؛ یعنی $f'(t) \simeq \Delta y$؛ پس آهنگ آنی تغییر f در لحظهٔ t، برابر است با $f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to ۰} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ که همان **سرعت لحظه‌ای** یک متحرّک در لحظهٔ t است. (f در بازهٔ $[t, t + \Delta t]$ مشتق‌پذیر است.)

مثال: معادلهٔ حرکت یک اتومبیل در هر لحظهٔ t، عبارت است از $f(t) = ۸۰t - ۴۰۰ \, Ln(t + ۵)$، سرعت لحظه‌ای این اتومبیل یا آهنگ آنی تغییر مکان اتومبیل، وقتی $t = ۱$، چه قدر است؟

حل: $f'(t) = ۸۰ - ۴۰۰(\frac{۱}{t + ۵}) = ۸۰(۱ - \frac{۵}{t + ۵})$

$$f'(۱) = ۸۰(۱ - \frac{۵}{۶}) = ۸۰ - \frac{۴۰۰}{۶} = \frac{۴۸۰ - ۴۰۰}{۶}$$

$$= \frac{۸۰}{۶} = ۱۳/۳ m/s$$

نکته (۱): اگر $y = f(x)$ معادلهٔ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، $f'(x)$ را آهنگ تغییر آنی f نسبت به متغیر مستقل x در نقطهٔ x می‌نامیم.

مثال: یک قطره نفت به شکل دایره، روی سطح آب در حال پخش شدن است. آهنگ تغییر سطح قطرهٔ نفت نسبت به شعاع، وقتی شعاع آن ۲ سانتیمتر است، چه قدر است؟

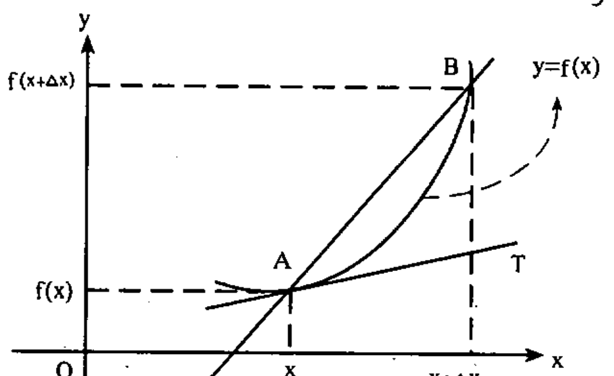
حل: سطح قطرهٔ نفت برابر سطح دایره است؛ یعنی $S(r) = \pi r^۲$ آهنگ تغییر سطح نسبت به شعاع

$S'(r) = ۲\pi r$

$S'(۲) = ۴\pi$

یعنی، سطح قطره وقتی شعاع آن برابر ۲ سانتیمتر است، به ازای هر واحد افزایش شعاع ۴π سانتیمتر مربع افزایش می‌یابد.

نکته (۲): مانند شکل تعبیر هندسی، آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به x در بازهٔ $[x, x + \Delta x]$، عبارت است از شیب خط قاطعی که از نقاط $A(x, f(x))$ و $B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ می‌گذرد و آهنگ آنی تغییر تابع f نسبت به x در نقطهٔ $A(x, f(x))$، عبارت است از شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ A.



نکته (۳): هر وقت از آهنگ تغییر صحبت می‌شود، منظور، آهنگ آنی تغییر است؛ مگر این که از آهنگ متوسط تغییر نام برده شود.

مثال: میزان افزایش مساحت یک مکعب به طول یال x را نسبت به x، وقتی بیابید که x مساوی ۲ سانتیمتر باشد.

حل: سطح مکعب برابر است با $S(x) = ۴x^۲$؛ پس:

$S'(x) = ۸x$

$S'(۲) = ۸ \times ۲ = ۱۶\ cm^۲$

یعنی، وقتی یک سانتیمتر به طول ضلع مکعب افزوده می‌شود، به سطح آن $۱۶\ cm^۲$ افزوده می‌شود.

میزانهای مرتبط یا کمیّتهای وابسته (قاعدهٔ زنجیر)

اگر y متغیر وابسته به x، به وسیلهٔ تابع $y = f(x)$ باشد و x نیز خود متغیر وابسته به t (t معمولاً زمان است) باشد؛ یعنی $x = y(t)$، در این صورت، آهنگ تغییر f نسبت به t (y نسبت به t) از قاعدهٔ زنجیر (مشتق تابع مرکّب) استفاده می‌شود؛ یعنی:

$$y' = (fog)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

یا

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

یا

$$y'_t = y'_x \times x'_t$$

این نوع میزان تغییر یا آهنگ تغییر را میزانهای مرتبط یا کمیّتهای وابسته گویند.

مثال: یک بالون کروی، در حال باد شدن است. اگر آهنگ افزایش شعاع آن $۰/۱ m/s$ باشد، هنگامی که شعاع آن ۲ متر است، حجم آن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

حل: کافی است $\frac{dv}{dt}$ را حساب کنیم؛ ولی داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

که

$$\frac{dr}{dt} = ۰/۱ \ , \ v = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

$$\frac{dv}{dr} = ۴\pi r^۲$$

$$\frac{dv}{dt} = ۴\pi r^۲ \times \frac{dr}{dt}$$

$$= ۴\pi \times ۲^۲ \times ۰/۱ = ۱۶\pi \times ۰/۱ = ۱/۶\pi\ \frac{m^۳}{s}$$

نکته مهم: برای حلّ مسائل آهنگ یا نرخ تغییرات روند زیر را انجام می‌دهیم.

الف) به تمام کمیّتهایی که داده شده‌اند یا باید تعیین شوند، علامت (**متغیری**) نسبت می‌دهیم و در صورت امکان، برای مسأله شکل رسم می‌کنیم تا کمیتها را شناسایی کنیم.

ب) معادله‌ای می‌نویسیم که ارتباط کمیّتها را تعیین کند.

ج) کمیتهای مستقل و وابسته را تعیین می‌کنیم.

د) از کمیتهای وابسته دو طرف معادله نسبت به کمیت مستقل، طبق قاعدهٔ زنجیر و یا ضمنی مشتق می‌گیریم.

ه) همهٔ مقادیر متغیرهای داده شده را در معادلهٔ مشتق جایگذاری می‌کنیم و سپس نسبت به میزان تغییر (آهنگ تغییر) مطلوب حل می‌کنیم.

مثال: یک ظرف دارای ۴۰ لیتر آب است، در لحظهٔ $t = ۰$، یک سوراخی در ظرف ایجاد می‌کنیم. اگر حجم آب باقیمانده در ظرف، پس از t ثانیه، از رابطهٔ $V = ۴۰\,(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست آید.

الف) با چه آهنگی پس از گذشت ۱ دقیقه، آب از ظرف خارج می‌شود؟

ب) در چه زمانی، آهنگ آنی تغییر V برابر آهنگ متوسط تغییر آن از $t = ۰$ تا $t = ۱۰۰$ ثانیه است؟

حل: آهنگ خروج آب در لحظهٔ $t = ۱$ دقیقه، برابر است با $V'(۶۰)$

$$V'(t) = ۸۰(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱ - \frac{t}{۱۰۰}) \qquad (t = ۶۰ \text{ ثانیه})$$

$$V'(۶۰) = ۸۰(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱ - \frac{۶۰}{۱۰۰}) = ۸۰(\frac{-۴۰}{۱۰۰^۲})$$

$$V'(۶۰) = \frac{-۳۲ \times ۱۰۰}{۱۰۰^۲} = -۰/۳۲$$

(علامت منفی، به دلیل خروج آب است.)

نکته: آهنگ تغییر چون مانند بردار سرعت است، می‌تواند منفی یا مثبت باشد؛ چون جهت دارد.

ب) شرط این که آهنگ آنی برابر آهنگ متوسط شود، باید:

$$V'(t) = \frac{V(۱۰۰) - V(۰)}{۱۰۰}$$

$$\frac{-۸۰}{۱۰۰}(۱ - \frac{t}{۱۰۰}) = \frac{۴۰(۱ - \frac{۱۰۰}{۱۰۰})^۲ - ۴۰(۱ - ۰)^۲}{۱۰۰}$$

$$-\frac{۸}{۱۰}(۱ - \frac{t}{۱۰۰}) = \frac{-۴۰}{۱۰۰} = -\frac{۴}{۱۰}$$

$$۲(۱ - \frac{t}{۱۰۰}) = ۱ \Rightarrow ۱ - \frac{t}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲}$$

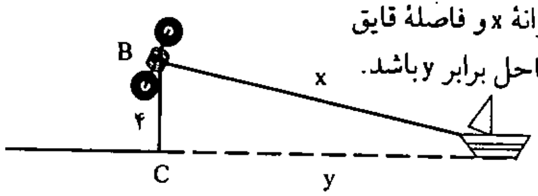
$$\frac{t}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow t = ۵۰$$

پس در ثانیهٔ پنجاهم، آهنگ آنی و متوسط در بازهٔ $[۰, ۱۰۰]$ برابر می‌شود.

مثال: یک قایق چوبی به وسیلهٔ طنابی که با سرعت ۳ متر

بر دقیقه، به دور یک استوانه می‌پیچد به ساحل کشیده می‌شود. قایق با چه سرعتی (آهنگ نزدیک شدن قایق) در لحظه‌ای که ۲۵ متر تا ساحل فاصله دارد، به ساحل نزدیک می‌شود؛ در صورتی که استوانه در ارتفاع ۴ متری از سطح آب نصب شده باشد؟

حل: فرض می‌کنیم مانند شکل طول طناب، بین قایق و استوانهٔ x و فاصلهٔ قایق تا ساحل برابر y باشد.



کافی است $\frac{dy}{dt}$ را حساب کنیم.

طبق شکل و مثلث قائم الزاویه داریم: $x^2 - 4^2 = y^2$

طبق قاعدهٔ زنجیر داریم: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

و $\frac{dx}{dt} = 3$ که متر بر دقیقه

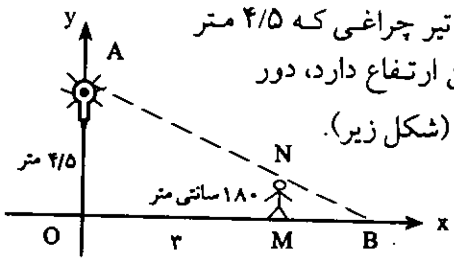
$$2x \frac{dx}{dt} = 2y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$y = 25$ و $x = \sqrt{25^2 + 4^2}$ پس:

$$\frac{dy}{dt} = 3 \times \frac{\sqrt{625 + 16}}{25} \simeq 3/03$$ متر در دقیقه

مثال: مردی به قد ۱۸۰ سانتیمتر با سرعت ۱۵۰ سانتیمتر بر ثانیه، از تیر چراغی که ۴/۵ متر از زمین ارتفاع دارد، دور می‌شود (شکل زیر).



الف) نوک سایه‌اش با چه آهنگی از چراغ دور می‌شود؟

ب) آهنگ تغییر طول سایه‌اش، چه قدر است؟

حل: فرض کنیم $x = OB$ طول سایهٔ به علاوهٔ فاصلهٔ شخص از تیر چراغ باشد،

$MN = 180cm$ = طول شخص

$y = OM$ فاصلهٔ شخص تا چراغ

$OA = 450cm$ = طول پایهٔ چراغ

الف) کافی است $\frac{dx}{dt}$ را حساب کنیم. طبق نسبت تشابه در مثلثهای OAB و MNB داریم:

$$\frac{MN}{OA} = \frac{MB}{OB} \Rightarrow \frac{180}{450} = \frac{x-y}{x}$$

پس: $$\frac{2}{5} = \frac{x-y}{x} \Rightarrow 5x - 5y = 2x$$

یا: $$x = \frac{5}{3} y$$

چون $\frac{dy}{dt} = 150$، پس $\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3} \frac{dy}{dt} = \frac{5}{3} \times 150$؛

بنابراین $$\frac{dx}{dt} = 250 cm/s$$

ب) طول سایهٔ MB را y در نظر می‌گیریم.

$$\frac{y}{x} = \frac{180}{450} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$$ و $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

پس: آهنگ افزایش طول سایهٔ شخص

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{5} \times 150 = 60 cm/s$$

تست: آهنگ آنی افزایش حجم یک کره، وقتی شعاع آن برابر ۱۰ سانتیمتر است، کدام است؟ در صورتی که شعاع آن با آهنگ ۰/۲ سانتیمتر در ثانیه افزایش یابد؟

۱) 400π ۲) 40π ۳) 80π ۴) 120π

جواب گزینهٔ ۳ است.

حل: $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$، $$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt} = 4\pi \times 100 \times \frac{2}{10} = 80\pi \ cm^3/s$$

تست: یک نردبان به طول ۴/۵ متر، به دیواری تکیه دارد. اگر پای نردبان از پای دیوار با سرعت ۶۰ سانتیمتر در ثانیه دور شود، سر نردبان با چه آهنگی به پایین دیوار کشیده می‌شود، وقتی پای آن ۱/۵ متر از دیوار فاصله دارد؟

۱) $-15\sqrt{2}$ cm/s ۲) $15\sqrt{2}$ cm/s

۳) $\frac{15}{\sqrt{2}}$ cm/s ۴) $-\frac{15}{\sqrt{2}}$ cm/s

جواب گزینهٔ ۱ است.

حل: فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار را x و فاصلهٔ سرنردبان تا پای دیوار را y می‌نامیم. طول نردبان برابر ۴/۵ متر است. کافی است $\frac{dy}{dt}$ را حساب کنیم؛ ولی داریم $x^2 + y^2 = 4/5^2$، پس:

$$2y \frac{dy}{dt} = -2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y} \times 60$$

چون $\frac{dx}{dt} = 60$ و متر $x = 1/5$، پس:

$$y = \sqrt{(4/5)^2 - (1/5)^2} = 3\sqrt{2}$$ متر

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-150}{300\sqrt{2}} \times 60 = \frac{-30}{\sqrt{2}} = -15\sqrt{2} \ cm/s$$

نکته: در مسائل اقتصادی، با سه تابع به نامهای: **تابع هزینه** $C(x)$، **تابع درآمد** $R(x)$ **و تابع سود** $P(x)$ سروکار داریم.

اگر **هزینهٔ متوسط، درآمد متوسط و سود متوسط**

خواسته شود، نسبتهای $\frac{C(x)}{x}$، $\frac{R(x)}{x}$ و $\frac{P(x)}{x}$ را حساب می‌کنیم، و اگر هزینه نهایی خواسته شود $C'(x)$ را محاسبه می‌کنیم. رابطهٔ بین سه تابع فوق به صورت زیر است:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

مثال: کارخانه‌ای برای تولید x ساعت مچی، $C(x)$ تومان هزینه می‌کند که $C(x)=۲۰۰۰+۱۰x+\frac{x^{۲}}{۱۰۰}$

الف) برای تولید صفر ساعت، چه میزان باید هزینه کند؟ (هزینهٔ اولیّه)

ب) هزینهٔ نهایی چیست؟

ج) هزینهٔ نهایی وقتی $x=۵۰$ چیست؟ هزینهٔ تولید ۵۱امین ساعت چیست؟

حل: الف) $C(۰)=۲۰۰۰$

ب) $C'(x)=۱۰+\frac{x}{۵۰} \Rightarrow C'(۵۰)=۱۰+۱=۱۱$

ج) $C(۵۱)-C(۵۰)=$

$$۲۰۰۰+۱۰(۵۱)+\frac{(۵۱)^{۲}}{۱۰۰}-۲۰۰۰-۱۰(۵۰)-\frac{(۵۰)^{۲}}{۱۰۰}$$

$$=۱۰+\frac{۱}{۱۰۰}(۵۱-۵۰)(۵۱+۵۰)=۱۰+۱/۰۱=۱۱/۰۱$$

هزینهٔ واقعی ۵۱امین ساعت.

تمرین

۱. نقطهٔ M روی مسیری به معادلهٔ $y=\sqrt{x^{۲}+۱}$ در حرکت است. هنگامی که M در نقطهٔ به طول ۷ قرار دارد، اگر x با آهنگ $۱۰\sqrt{۲}$ متر در ثانیه تغییر کند، y با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ در چه نقطه‌ای آهنگ تغییر y دو برابر آهنگ تغییر x می‌شود؟

۲. سود هفتگی یک شرکت به وسیلهٔ تعداد تولید x رادیو، P تومان می‌باشد که از فرمول $P(x)=۷۵x-۰/۰۳x^{۲}-۱۵۰۰۰$ معین می‌شود. وقتی سطح تولید به ۱۰۰۰ رادیو در هفته می‌رسد، میزان تغییر سود را حساب کنید.

۳. یک بشکهٔ بنزین در حال خالی شدن است. اگر پس از t ثانیه، G گالن بنزین در بشکه موجود باشد و $G(t)=۳(۱۵-t)^{۲}$. (G تعداد گالن بنزین موجود برحسب t است.)

الف) آهنگ متوسط تخلیهٔ بنزین در طول ۱۲ ثانیه چه قدر است؟

ب) آهنگ آنی تخلیهٔ بنزین، پس از ۱۲ ثانیه چه قدر است؟

۴. یک بالن کروی، پر از هواست. اگر هوای آن با آهنگ ۸ سانتیمتر مکعب در دقیقه نشت کند، وقتی شعاع آن ۱۵ سانتیمتر است، آهنگ کاهش شعاع آن چه قدر است؟

۵. یک ظرف قیفی با آهنگ ۳ سانتیمتر مکعب در ثانیه از آب پر می‌شود. ارتفاع این ظرف ۱۰ و شعاع قاعدهٔ آن ۵ سانتیمتر است. آهنگ بالا آمدن سطح آب وقتی این سطح ۴ سانتیمتر بالا آمده باشد، چه قدر است؟

۶. یک بشکهٔ استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳۰۰ سانتیمتر با آهنگ ۸ متر مکعب در دقیقه از گندم پر می‌شود، سرعت افزایش عمق گندم چه قدر است؟

۷. اگر شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلیمتر در ثانیه افزایش یابد، آهنگ تغییر حجم کره، وقتی مساحت سطح آن برابر ۱۰ میلیمتر مربع است، چه قدر است؟

۸. شعاع دایره‌ای در حال بزرگ شدن را بیابید که آهنگ تغییر مساحتش دو برابر آهنگ تغییر شعاعش باشد.

۹. ذره‌ای در امتداد منحنی $y=۲x^{۳}-۳x^{۲}+۴$ در حرکت است. در لحظه‌ای که $x=۲$ است، مؤلفهٔ x ذره با آهنگ $\frac{۱}{۲}$ واحد در ثانیه افزایش می‌یابد. آهنگ تغییر y در این لحظه، چه قدر است؟

۱۰. یک هواپیما که در ارتفاع ۴ کیلومتری زمین، به موازات زمین در پرواز است از روی ایستگاه رادار می‌گذرد. پس از لحظه‌ای، رادار نشان می‌دهد که هواپیما ۵ کیلومتر دور شده است و فاصلهٔ هواپیما تا ایستگاه، به میزان ۳۰۰ کیلومتر در ساعت افزایش می‌یابد. سرعت حرکت افقی هواپیما در آن لحظه چه قدر است؟

۱۱. دختر بچه‌ای بادبادکی را در ارتفاع ۹۰ متری پرواز می‌دهد. باد آن را با سرعت ۷/۵ متر در ثانیه، به طور افقی از وی دور می‌کند. وقتی بادبادک در فاصلهٔ ۱۵۰ متری از او است، سرعت رها شدن نخ از دست وی، باید چه قدر باشد؟

۱۲. ذره‌ای روی مسیر $۵xy^{۳}-۸y^{۲}=۸$ حرکت می‌کند، اگر مؤلّفه x با سرعت ۶m/s افزایش یابد، هنگامی که ذرّه در نقطهٔ (۱,۲) قرار دارد، مؤلّفه y با چه سرعتی تغییر می‌کند؟