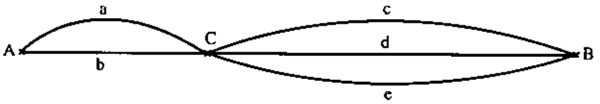
آنالیز ترکیبی
(قسمت اوّل)

• میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال دوم تا پیش دانشگاهی

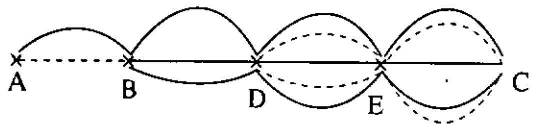
اصل ضرب و اصل جمع

در زندگی روزمرّه، بسیاری از تصمیم‌گیریهای خود را براساس شمارش انجام می‌دهیم. برای مثال، اگر برای رفتن از منزل (نقطهٔ A) به مدرسه (نقطهٔ B) از محل C عبور کنید و از A تا C، ۲ راه مختلف و از C تا B، ۳ راه مختلف وجود داشته باشد، در این صورت، با توجه به شکل زیر و با شمارش، ملاحظه می‌کنیم که از A تا B (منزل تا مدرسه) ۶ راه مختلف وجود دارد.



اگر دو راه از A تا C را با حرفهای a و b و سه راه از C تا B را با حرفهای e و d و c مشخص کنیم، آن‌گاه ۶ مسیر مختلف از A تا C عبارت است از : ac، ad، ae، bc، bd و be.

اکنون اگر برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ C، بخواهید از محلهای B، D و E عبور کنید و تعداد زیادی راه بین این نقاط وجود داشته باشد، آن‌گاه شمردن تعداد مسیرهای موجود از A تا C، از طریق B و D و E به کمک شکل، کاری طاقت‌فرساست. در این حالت، برای سرعت بخشیدن به محاسبات، نیازمند به مطالعه و یادگیری روشهای شمارش هستیم.



آنالیز ترکیبی، ارائهٔ روشهای شمارش و تعداد حالتهای ممکن است ؛ بدون این که هریک از حالتها شمرده شوند. این مبحث در ریاضیات، شامل جایگشتها، تبدیلها و ترکیبها است.

در ریاضیات هم، مانند زندگی روزمّره، با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که برای حلّ آنها نیاز به شمارش پیدا می‌کنیم. برای مثال، می‌دانیم که در حال حاضر، شمارهٔ پلاک خودروها از یک عدد ۵ رقمی و یک حرف از الفبای فارسی تشکیل شده است. با این شرایط، با حرف «ب» چند خودرو را می‌توان شماره کرد؟ از مجموعهٔ ۴ عضوی B، به مجموعهٔ ۳ عضوی A چند نگاشت یک‌به‌یک و چند نگاشت پوشا وجود دارد؟ تعداد رابطه‌هایی که خاصیت بازتابی روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ داشته باشند، چندتاست؟

اصل ضرب یا اصل شمارش

هرگاه عملی در k مرحلهٔ متوالی انجام پذیرد؛ به طوری که در مرحلهٔ اوّل به n_1 راه مختلف، در مرحلهٔ دوم به n_2 راه مختلف، در مرحلهٔ سوّم به n_3 راه مختلف، ... و در مرحلهٔ kام به n_k راه مختلف انجام شود، در این صورت، آن عمل را می‌توان به $n_1\times n_2\times n_3\times\ldots\times n_k$ راه مختلف انجام داد.

مثال. در یک دبیرستان؛ ۳ کلاس جبر و احتمال مختلف و ۲ کلاس حسابان مختلف تشکیل می‌شود. یک دانش‌آموز به چند راه مختلف می‌تواند این دو درس را انتخاب واحد کند.

حل. عمل انتخاب واحد درسی، در دو مرحله انجام می‌گیرد؛ مرحلهٔ اوّل، دانش‌آموز می‌تواند به ۳ راه مختلف کلاس جبر و احتمال و در مرحلهٔ دوم می‌تواند به ۲ راه مختلف کلاس حسابان را انتخاب کند؛ بنابراین طبق اصل ضرب، دانش‌آموز می‌تواند به $۶=۲\times۳$ راه مختلف، انتخاب واحد کند.

مثال. با رقمهای ۲، ۵، ۶، ۳ و ۱ چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقمها می‌توان نوشت؟

حل. عمل نوشتن یک عدد سه رقمی، در سه مرحله انجام می‌گیرد؛ مرحلهٔ اوّل، انتخاب رقم صدگان عدد است که می‌تواند به ۵ راه مختلف انجام پذیرد؛ زیرا پنج عدد متمایز داریم که در این مرحله، می‌توان هریک از این عددها را انتخاب کرد. اکنون در شروع مرحلهٔ دوم، چهار عدد داریم؛ زیرا یک عدد را برای رقم صدگان، در مرحلهٔ اوّل انتخاب کرده‌ایم. مرحلهٔ دوم، انتخاب رقم دهگان عدد است که می‌تواند به ۴ راه مختلف انجام گیرد. مرحلهٔ سوّم، انتخاب رقم یکان عدد است که می‌تواند به ۳ راه مختلف انجام پذیرد؛ بنابراین طبق اصل ضرب، می‌توان $۵\times۴\times۳=۶۰$ عدد سه رقمی بدون تکرار نوشت:

رقم صدگان	رقم دهگان	رقم یکان	
$\boxed{۵}$ انتخاب	$\boxed{۴}$ انتخاب	$\boxed{۳}$ انتخاب	$۵\times۴\times۳=۶۰$
مرحلهٔ اوّل	مرحلهٔ دوم	مرحلهٔ سوّم	

مثال. در مثال قبل، فرض کنیم رقمهای عدد سه رقمی بتوانند تکرار شوند؛ در این صورت، هر مرحله می‌تواند به ۵ راه مختلف انجام پذیرد؛ زیرا رقمی که برای صدگان انتخاب کردیم، می‌تواند برای رقم دهگان یا یکان نیز انتخاب شود؛ بنابراین طبق اصل ضرب، می‌توان $۱۲۵=۵\times۵\times۵$ عدد سه رقمی نوشت:

رقم صدگان	رقم دهگان	رقم یکان	
$\boxed{۵}$ انتخاب	$\boxed{۵}$ انتخاب	$\boxed{۵}$ انتخاب	$۵\times۵\times۵=۱۲۵$
مرحلهٔ اوّل	مرحلهٔ دوم	مرحلهٔ سوّم	

مثال. شمارهٔ پلاک خودروها، از یک عدد پنج رقمی و یک حرف از الفبای فارسی تشکیل شده است؛ به طوری که حداقل یک رقم از این عدد پنج رقمی، با رقمهای دیگر متمایز است، و شمارهٔ پلاک، فاقد عدد صفر است. با این شرایط، چند خودرو را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

حل. این کار در شش مرحله انجام می‌گیرد؛ مرحلهٔ اوّل که انتخاب یک حرف از الفبای فارسی است، با ۳۲ راه انجام می‌شود. مرحله‌های دوم تا ششم که انتخاب یک عدد پنج رقمی است، هر کدام با ۹ راه انجام می‌شوند؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

۳۲	۹	۹	۹	۹	۹

$$۳۲\times۹\times۹\times۹\times۹\times۹=۲^{۵}\times۹^{۵}$$

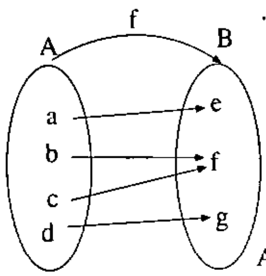
از بین این اعداد، فقط ۹ تای آنها، همهٔ رقمهایشان تکراری است، که عبارت است از: ۱۱۱۱۱، ۲۲۲۲۲، ...، ۹۹۹۹۹

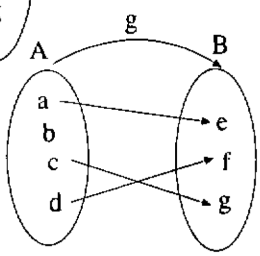
هر کدام از این عددها، می‌توانند با یکی از حروف الفبای فارسی بیایند؛ بنابراین تعداد خودروهایی که با شرایط مسأله می‌توان شماره کرد، عبارت است از:

$$۲^{۵}\times۹^{۵}-۹\times۳۲=۲^{۵}\times(۹^{۵}-۹)$$

نگاشت

دو تابع زیر را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,g\}$ در نظر بگیرید.



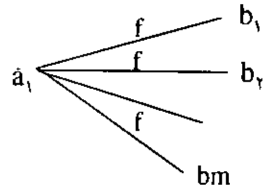


همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f:A\to B$ تابعی است که در آن، $D_f=A$ ؛ یعنی تابع f روی همهٔ عضوهای مجموعهٔ A اثر می‌کند ؛ امّا $g:A\to B$ تابعی است که در آن $D_g \subsetneq A$ ؛ یعنی تابع g روی همهٔ عضوهای مجموعهٔ A اثر نمی‌کند. بنا به تعریف، تابع $f:A\to B$ را یک نگاشت گوییم ؛ ولی تابع $g:A\to B$ نگاشت نیست.

تعریف. تابع $f:A\to B$ را یک نگاشت گوییم ؛ هرگاه در این تابع $D_f=A$.

محاسبهٔ تعداد نگاشتها از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی

فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$، می‌خواهیم تعداد نگاشتهای $f:A\to B$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع f را روی a_1 اثر می‌دهیم ؛ $f(a_1)$ می‌تواند برابر b_1 یا b_2 یا ... یا b_m باشد ؛ یعنی برای $f(a_1)$، m انتخاب داریم :



به همین ترتیب، برای a_2، a_3، ...، a_n، هرکدام m انتخاب داریم ؛ بنابراین :

$f(a_1)$ $f(a_2)$ $f(a_m)$

$$\underbrace{\boxed{m}\ \boxed{m}\ \cdots\ \boxed{m}}_{n\ \text{مرتبه}}$$

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم :

تعداد نگاشتها از مجموعه A به مجموعه B

$$=\underbrace{m\times m\times\cdots\times m}_{n\ \text{مرتبه}}=m^n$$

مثال. تعداد نگاشتهایی که از یک مجموعهٔ سه عضوی به یک مجموعهٔ چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتاست؟

حل. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$، پس $n=۳$ و $m=۴$ ؛ بنابراین :

تعداد نگاشتها از A به B $=۴^۳=۶۴$

اصل جمع

فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی و جدا از هم باشند ؛ یعنی $A\cap B=\varnothing$، بنابراین تعداد اعضای $A\cup B$ برابر با مجموع تعداد عضوهای دو مجموعهٔ A و B است ؛ یعنی :

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

به عبارت دیگر، می‌توان گفت اگر دو عمل ناسازگار باشند ؛ یعنی انجام همزمان آنها با هم غیرممکن باشد و عمل اوّل به m راه و عمل دوم به n راه انجام پذیرد، در این صورت، عمل اوّل یا عمل دوم (نه هر دو با هم) را به $m+n$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال. با رقمهای ۱، ۲، ۵ و ۳ چند عدد بزرگتر از ۱۰۰ می‌توان نوشت؟

حل. عددهای بزرگتر از ۱۰۰ را که می‌توان با این اعداد ساخت، سه رقمی یا چهار رقمی می‌باشند :

اگر مجموعهٔ A، اعداد سه رقمی ساخته شده با این رقمها باشند، آن‌گاه داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان
۲	۳	۴

$$n(A)=۴\times۳\times۲=۲۴$$

اگر مجموعهٔ B اعداد چهاررقمی ساخته شده با این رقمها باشند، آن‌گاه داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۲	۳	۴

$$n(B)=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

چون $A\cap B=\varnothing$ ؛ یعنی عدد ساخته شده نمی‌تواند هم سه رقمی و هم چهاررقمی باشد ؛ بنابراین تعداد عددهای سه رقمی یا چهاررقمی، طبق اصل جمع برابر است با :

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۲۴+۲۴=۴۸$$

مثال. با رقمهای ۴، ۳، ۵، ۰، ۱ و ۹ چند عدد بدون تکرار رقمها می‌توان ساخت ؛ به طوری که :

الف) چهاررقمی باشد.

ب) چهاررقمی فرد باشد.

ج) چهاررقمی زوج باشد.

د) چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد.

هـ) چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ و زوج باشد.

و) چهاررقمی مضرب ۵ باشد.

حل) الف. عمل نوشتن یک عدد چهاررقمی در ۴ مرحله انجام می‌گیرد ؛ مرحلهٔ اوّل، انتخاب عدد هزارگان است ؛ چون این عدد نمی‌تواند برابر ۰ باشد، پس این مرحله با ۵ راه مختلف انجام می‌پذیرد. اکنون در شروع مرحلهٔ دوم، پنج عدد داریم ؛ پس این مرحله با ۵ راه مختلف انجام می‌گیرد. به همین صورت، مرحله‌های سوّم و چهارم به ترتیب، با ۴ راه مختلف و ۳ راه مختلف انجام می‌پذیرد ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۳}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۵}$　$\boxed{۵}$

$$۵\times۵\times۴\times۳=۳۰۰$$

ب. عدد فرد، عددی است که رقم یکان آن فرد باشد ؛ بنابراین رقم یکان می‌تواند یکی از عددهای ۵، ۷، ۱ و ۹ باشد، پس انتخاب رقم یکان با ۴ راه مختلف انجام می‌گیرد ؛ بنابراین داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۴}$　$\boxed{۳}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۴}$

$$۴\times۴\times۳\times۴=۱۹۲$$

ج. عدد زوج، عددی است که رقم یکان آن زوج باشد ؛ بنابراین رقم یکان می‌تواند ۰ یا ۴ باشد ؛ دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اوّل. رقم یکان عدد ۴ باشد ؛ در این حالت، خانهٔ مربوط به رقم یکان، با ۱ راه پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۱}$　$\boxed{۳}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۴}$

$$n(A)=۴\times۴\times۳\times۱=۴۸$$

حالت دوم. رقم یکان عدد ۰ باشد ؛ در این حالت نیز خانهٔ مربوط به رقم یکان با ۱ راه پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۱}$　$\boxed{۳}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۴}$

$$n(B)=۴\times۴\times۳\times۱=۴۸$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالتهای اول و دوم ؛ تعداد عددهای چهاررقمی زوج برابر است با :

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۴۸+۴۸=۹۶$$

د. در صورتی که عدد چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد، آن‌گاه رقم هزارگان آن یکی از عددهای ۴، ۵ و ۹ است ؛ بنابراین خانهٔ مربوط به رقم هزارگان، با ۳ راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۳}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۵}$　$\boxed{۳}$

$$۳\times۵\times۴\times۳=۱۸۰$$

هـ. دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اوّل. رقم هزارگان عدد ۴ باشد ؛ چون عدد زوج است، پس رقم یکان باید عدد ۰ قرار گیرد، بنابراین داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۱}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۵}$　$\boxed{۱}$

$$n(A)=۱\times۵\times۴\times۱=۲۰$$

حالت دوم. رقم هزارگان ۵ یا ۹ باشد ؛ پس خانهٔ مربوط به رقم هزارگان، با ۲ راه مختلف پُر می‌شود ؛ چون عدد زوج است، پس رقم یکان، یکی از عددهای ۰ یا ۴ است، پس خانهٔ مربوط به رقم یکان، با دو راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان　رقم دهگان　رقم صدگان　رقم هزارگان

$\boxed{۲}$　$\boxed{۳}$　$\boxed{۴}$　$\boxed{۲}$

$$n(B)=۲\times۴\times۳\times۲=۴۸$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالتهای اوّل و دوم، تعداد عددهای چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ و زوج، برابر است با :

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۲۰+۴۸=۶۸$$

و. عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن، ۰ یا ۵ باشد ؛ دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اوّل. رقم یکان عدد ۰ باشد ؛ بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۳	۴	۵

$$n(A) = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۶۰$$

حالت دوم. رقم یکان عدد ۵ باشد ؛ بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۳	۴	۴

$$n(B) = ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۴۸$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالتهای اوّل و دوم، تعداد عددهای چهاررقمی مضرب ۵، برابر است با :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸$$

تعداد ماتریسها از مرتبهٔ $m \times n$ که درآیه‌های ۰ یا ۱ دارند

فرض کنیم A یک ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ باشد، این ماتریس دارای $m \times n$ درآیه است که هریک از آنها می‌توانند عدد ۰ یا ۱ باشند. اگر مکان هریک از درآیه‌ها را با یک خانهٔ مستطیل شکل نمایش دهیم، هر خانه با ۲ راه مختلف پُر می‌شود ؛ زیرا هر خانه می‌تواند با دو عدد ۰ یا ۱ پُر شود ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{۲} & \boxed{۲} & \cdots & \boxed{۲} \\ \boxed{۲} & \boxed{۲} & \cdots & \boxed{۲} \\ \vdots & & & \\ \boxed{۲} & \boxed{۲} & \cdots & \boxed{۲} \end{bmatrix} \updownarrow m = \text{تعداد سطرها}$$

$$\longleftarrow n = \text{تعداد ستون} \longrightarrow$$

تعداد ماتریسهای از مرتبهٔ $m \times n$ با درآیه‌های ۰ یا ۱

$$= \underbrace{۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{m \times n \text{ مرتبه}} = ۲^{m \times n}$$

مثال. چند ماتریس ۳×۳ با درآیه‌های ۰ و ۱ می‌توان نوشت؟

حل. تعداد ماتریسها از مرتبهٔ ۳×۳ با درآیه‌های ۰ یا ۱ $= ۲^{۳ \times ۳} = ۲^۹$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی

فرض کنیم $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد ؛ هریک از زیرمجموعه‌های A را با یک کُد n رقمی شامل رقمهای ۰ و ۱ مشخص می‌کنیم ؛ به طوری که اگر آن زیرمجموعه، شامل عضو x_i $(1 \le i \le n)$ باشد، iامین رقم کد عدد ۱ و اگر زیرمجموعه شامل عضو x_i نباشد، iامین رقم کد عدد ۰ است. برای مثال، کد $\underbrace{۱۱۰۰...۰۱}_{n \text{ رقم}}$ زیرمجموعهٔ زیر را مشخص می‌کند :

$$B = \{x_1, x_2, x_n\}$$

زیرا اوّلین، دومین و nامین رقم کد، عدد ۱ می‌باشند ؛ پس زیرمجموعه شامل x_1 ، x_2 و x_n است و بقیهٔ رقمهای کد، برابر صفرند، پس زیرمجموعه شامل بقیهٔ اعضای A نمی‌باشد.

در حالت کلی، تعداد کُدهای n رقمی که با دو عدد ۰ و ۱ ساخته می‌شوند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی A است. برای یافتن تعداد کدهای n رقمی که با دو رقم ۰ و ۱ ساخته می‌شوند، کافی است n خانهٔ مستطیل شکل در نظر بگیریم ؛ واضح است که هر خانه با دو راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$$\boxed{۲}\ \boxed{۲}\ \boxed{۲}\ \cdots\ \boxed{۲}$$

$$\longleftarrow n \text{ تا خانه} \longrightarrow$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{n \text{ مرتبه}} = ۲^n$$

برای مثال، کد n رقمی ۱...۱۱۱ که همهٔ رقمهای آن عدد ۱ هستند، زیرمجموعهٔ $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ را مشخص می‌کند که این زیرمجموعه، برابر A است و کد n رقمی ۰...۰۰۰ که همهٔ رقمهای آن عدد ۰ هستند، زیرمجموعهٔ $\varnothing$ را مشخص می‌کند.

تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی یک مجموعهٔ n عضوی

رابطه. مجموعه‌های A و B را در نظر می‌گیریم، هر زیرمجموعهٔ حاصلضرب دکارتی $A \times B$ ، یک رابطه از A در B است. اگر رابطه را با R نشان دهیم، آن‌گاه $R \subseteq A \times B$. درصورتی که $A = B$ ، R را یک رابطه روی A می‌گوییم. هرگاه

R رابطه‌ای روی A باشد و $(a,b)\in R$ ، می‌نویسیم : aRb .

درصورتی که A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، $A\times A$ دارای $n^{۲}$ عضو است و تعداد زیرمجموعه‌های $A\times A$ که همان تعداد رابطه‌ها روی A می‌باشد، برابر $۲^{n^{۲}}$ است.

رابطهٔ انعکاسی (بازتابی)

رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ انعکاسی (بازتابی) است ؛ هرگاه برای هر $x\in A$ ، داشته باشیم :

$(x,x)\in R$ یا xRx

یعنی هر عضو A، با خودش رابطه داشته باشد. رابطهٔ R در A، انعکاسی نیست، هرگاه $x\in A$ ای وجود داشته باشد ؛ به طوری که $(x,x)\notin R$.

مثال. مجموعهٔ دوعضوی $A=\{a,b\}$ را در نظر بگیرید، تعداد رابطه‌های انعکاسی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل. $A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

درصورتی که R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعهٔ A باشد، R باید شامل دو عضو (a,a) و (b,b) باشد. همچنین R می‌تواند بجز این دو عضو، شامل عضوهای (a,b) یا (b,a) باشد.

اکنون اگر همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{(a,b),(b,a)\}$ را بنویسیم و به هریک از این زیرمجموعه‌ها، دو عضو (a,a) و (b,b) را اضافه کنیم، همهٔ رابطه‌های انعکاسی روی A به‌دست می‌آید.

$\{(a,b)\}\subseteq B\ ;\ R_{۱}=\{(a,a),(b,b),(a,b)\}$
$\{(b,a)\}\subseteq B\ ;\ R_{۲}=\{(a,a),(b,b),(b,a)\}$
$\{(a,b),(b,a)\}\subseteq B\ ;\ R_{۳}=\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$
$\varnothing\subseteq B\ ;\ R_{۴}=\{(a,a),(b,b)\}$

در حالت کلی، اگر $A=\{x_{۱},x_{۲},\dots,x_{n}\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد، می‌دانیم $A\times A$ دارای $n^{۲}$ عضو است و تعداد عضوهای $A^{۲}$ که به صورت (x_i,x_i) $۱\le i\le n$ هستند، برابر n است ؛ بنابراین مجموعهٔ $B=\{(x_i,x_j)|i\ne j\ ,\ ۱\le i,j\le n\}$ وجود دارد که دارای $n^{۲}-n$ عضو است. اکنون اگر به هریک از زیرمجموعه‌های B، عضوهای مجموعهٔ $A=\{(a_{۱},a_{۱}),(a_{۲},a_{۲}),\dots,(a_{n},a_{n})\}$ را بیفزاییم، رابطه‌های انعکاسی روی A به دست می‌آید ؛ چون B دارای $۲^{n^{۲}-n}$ زیرمجموعه است، پس تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی مجموعهٔ n عضوی A برابر $۲^{n^{۲}-n}$ است.

تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ n عضوی

رابطهٔ تقارنی. رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A، یک رابطهٔ تقارنی است ؛ هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم :

$(x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R$

مجموعهٔ n عضوی $A=\{x_{۱},x_{۲},\dots,x_{n}\}$ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که $A\times A$ دارای $n^{۲}$ عضو است و مجموعهٔ $A_{۱}=\{(x_i,x_i)|۱\le i\le n\}$ دارای n عضو است ؛ بنابراین مجموعهٔ $A_{۲}=A^{۲}-A_{۱}=\{(x_i,x_j)|i\ne j\ ,\ ۱\le i\ ,\ j\le n\}$ و دارای $n^{۲}-n$ عضو است و مجموعهٔ $A_{۲}$ دارای $\frac{۱}{۲}(n^{۲}-n)$ زیرمجموعه، به صورت $A_{ij}=\{(x_i,x_j)\ ,\ (x_j,x_i)\}$ است.

برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی مجموعهٔ A، می‌توانیم هریک از عضوهای $A_{۱}$ را در R قرار دهیم یا ندهیم، همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم ؛ بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A به صورت زیر به دست می‌آید :

تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ n عضوی

$$=۲^{n}\times ۲^{\frac{۱}{۲}(n^{۲}-n)}=۲^{\frac{۱}{۲}(n^{۲}+n)}$$

تذکر. برای نوشتن رابطهٔ R که تقارنی و انعکاسی باشد، کافی است عضوهای مجموعهٔ $A_{۱}$ را در R قرار دهیم و می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم ؛ بنابراین تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی مجموعهٔ n عضوی A، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{A_{ij}|i\ne j\ ,\ ۱\le i\ ,\ j\le n\}$ است ؛ چون B، $\frac{۱}{۲}(n^{۲}-n)$ عضو دارد، بنابراین، داریم :

تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی یک مجموعهٔ n عضوی

$$=۲^{\frac{۱}{۲}(n^{۲}-n)}$$