

آموزش ترجمه متون ریاضی (۵)

از کتاب: روشهایی در جبر
ترجمه: حمیدرضا امیری

The quadratic function $f(x)$ has the following properties:

- (i) $f(0) = c$.
(ii) As $x \rightarrow \pm\infty$; if $a > 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$,
if $a < 0$, $f(x) \rightarrow -\infty$.
(iii) If $a > 0$, then, from Equation (3.1),

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

The minimum value $(4ac - b^2)/(4a)$ is attained when $x = -b/(2a)$.
If $a < 0$, then

$$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

The maximum value $(4ac - b^2)/(4a)$ is attained when $x = -b/(2a)$.

$$(iv) f(x) = 0 \Rightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0.$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}. \quad (3.2)$$

تابع درجه دوم $f(x)$ دارای خواص زیر می باشد:

$$f(0) = c \quad (1)$$

(۲) درحالتی که $x \rightarrow \pm\infty$ ؛ اگر $a > 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow +\infty$

اگر $a < 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$

(۳) با توجه به رابطه (۳.۱) اگر $a > 0$ واضح است که

$$f(x) \geq \frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$$

در این حالت کمترین مقدار عبارت $\frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$ به ازای $x = \frac{-b}{(2a)}$ به دست می آید.

اگر $a < 0$ در این صورت $f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$. در این حالت بیشترین مقدار عبارت $\frac{(4ac - b^2)}{(4a)}$ به ازای $x = \frac{-b}{(2a)}$ حاصل می شود.

3 The quadratic function and quadratic equations

۳ - توابع درجه دوم و معادلات درجه دوم

3.1 Quadratic functions

The function $f(x)$, where $f(x) = ax^2 + bx + c$, and a, b, c are constants, $a \neq 0$, is called a *quadratic function*, or sometimes a quadratic polynomial. From elementary algebra

$$(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2.$$

Using this, we write

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \quad (3.1)$$

۳.۱. توابع درجه دوم

تابع $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ در آن a و b و c مقادیر ثابت و $a \neq 0$ ، یک تابع درجه دوم، یا بعضی اوقات یک چند جمله ای درجه دوم نامیده می شود.

حال با توجه به اتحاد $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$ و

استفاده از آن، می توانیم بنویسیم:

$$ax^2 + bx + c \equiv a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \equiv$$

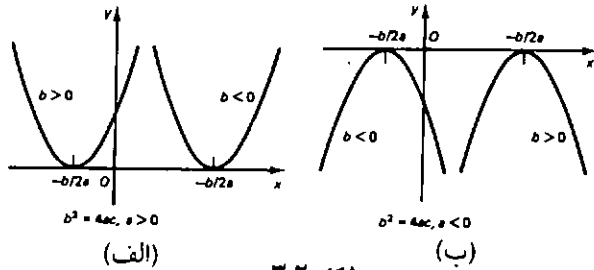
$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \Rightarrow ax^2 + bx + c$$

$$\equiv a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (3.1)$$

(2) If $b^2 = 4ac$, the curve $y = f(x)$ touches the x -axis, since the equation $f(x) = 0$ then has two equal roots at $x = -b/(2a)$.

(۴) اگر $f(x) = 0$ خواهیم داشت:

(۲) اگر $b^2 = 4ac$ ، منحنی $y = f(x)$ بر محور x مماس است، در این حالت معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه مساوی با هم در $x = \frac{-b}{2a}$ خواهد بود.



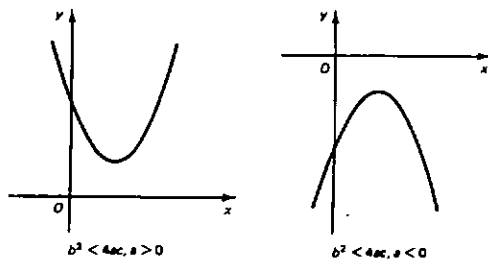
شکل ۳.۲

(3) If $b^2 < 4ac$, the equation $f(x) = 0$ has no real roots. [We have seen above that when $\Delta < 0$, there are no real roots of the equation $f(x) = 0$. In such a situation there are always two complex roots. If we define i to be such that $i^2 = -1$, then, from formula (3.2),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}]$$

(۳) اگر $b^2 < 4ac$ ، معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی نخواهد داشت.
توضیح: دیدیم که اگر $\Delta < 0$ معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. در این وضعیت همواره دو ریشه مختلط موجود است. اگر تعریف کنیم $i^2 = -1$ ، در این صورت، با توجه به فرمول (۳.۲) داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$



شکل ۳.۳

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{b}{2a} \right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

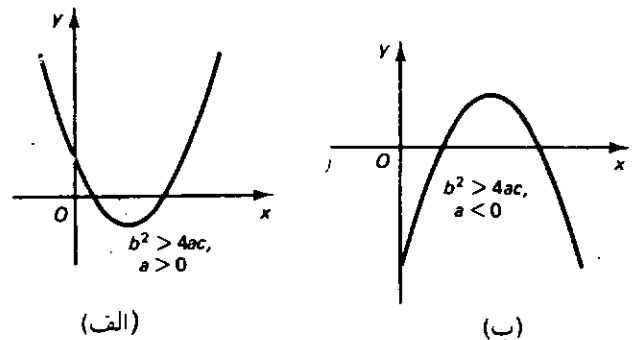
$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.2)$$

This result has an important graphical interpretation. There are three cases to consider, depending on whether the discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ is positive, negative or zero.

(1) If $b^2 > 4ac$, the curve $y = f(x)$ cuts the x -axis at two distinct points. This, taken together with (ii), enables us to draw the sketches of the curves $y = f(x)$ as in Fig. 3.1.

این نتیجه یک تعبیر نموداری مهم در بر دارد. با توجه به مبین عبارت فوق یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ که مثبت، منفی یا صفر باشد، ۳ حالت وجود دارد.

(۱) $b^2 > 4ac$ ، منحنی $y = f(x)$ محور x را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. در این وضعیت و با توجه به قسمت (۲) (اگر $a > 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow +\infty$ و اگر $a < 0$ آنگاه $f(x) \rightarrow -\infty$) برای رسم منحنی $y = f(x)$ دو حالت ممکن حاصل می‌شود، که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید.



شکل ۳.۱

تجزیه و تحلیل فوق در زیر نمایش داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \Delta > 0 & \text{ریشه حقیقی متمایز} \\ \Delta = 0 & \text{ریشه حقیقی برابر} \\ \Delta < 0 & \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

To solve a quadratic equation it is often not necessary to use the general formula (3.3). In simple cases, when the roots are integers or rational numbers, one can often express the quadratic function in terms of its factors, as in Equation (3.4), by inspection. The roots are then just α and β . If a factorisation is not immediately obvious, one may try the factor theorem (p. 21) to obtain a factor.

برای حل یک معادله درجه ۲ حتماً لازم نیست از فرمول عمومی (۳.۳) استفاده شود. در حالت‌های ساده، زمانی که ریشه‌ها صحیح یا گویا هستند، می‌توان معادله درجه دوم را برحسب عامل‌هایش بیان کرد (به معادله «۳.۴» توجه کنید) و ریشه‌ها یعنی α و β به راحتی حاصل می‌شوند. اگر تجزیه بلافاصله انجام پذیر نبود، سعی می‌کنیم از قضیه عامل (صفحه ۲۱) برای به دست آوردن یک عامل، استفاده کنیم.

Example 1 Describe the important features and sketch the graph of:

- (a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$,
 (b) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$,
 (c) $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$.

(a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$.

(i) $f_1(0) = 5$.

(ii) As $x \rightarrow \pm\infty$, $f_1(x) \rightarrow \infty$.

(iii) $f_1(x) = (x^2 - 3x + 5)$

$$= \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > \frac{11}{4}$$

So $f_1(x)$ has a minimum value of $\frac{11}{4}$ when $x = \frac{3}{2}$, and so is never zero. The graph of $f_1(x)$ is shown in Fig. 3.4.

مثال (۱) قسمتهای مهم راجع به اشکال منحنیهای داده شده را

توصیف کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$

ب) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$

ج) $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$

الف) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$

3.2 Quadratic equations

The equation $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, is called a *quadratic equation*. From Equation (3.2) the roots of this quadratic equation are

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (3.3)$$

If we denote these roots by α and β , then

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta). \quad (3.4)$$

۳.۲- معادلات درجه دوم

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ زمانی که $a \neq 0$ ، یک معادله

درجه دوم نامیده می‌شود. با توجه به معادله (۳.۲) ریشه‌های این معادله درجه دوم عبارتند از:

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (3.3)$$

اگر ما این ریشه‌ها را با α و β نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (3.4)$$

From Equation (3.3), or alternatively by equating coefficients of x^1 and x^0 in Equation (3.4), we find

$$\alpha + \beta = -b/a, \quad (3.5a)$$

$$\alpha\beta = c/a. \quad (3.5b)$$

It follows immediately from Equation (3.5b) that, when the roots are real, they are of the *same sign* if a and c are of the *same sign*. (From Equation (3.5a) it follows that they are of *different sign* from b .) The roots are of *opposite sign* if a and c are of *opposite sign*.

The above analysis indicates the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{two distinct} \\ \text{two equal} \\ \text{no} \end{array} \right. \text{ real roots} \left\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right. \right.$$

با توجه به رابطه (۳.۳)، یا با متحد قرار دادن ضرایب x^1 و x^0 در معادله «۳.۴»، خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad (\text{الف } 3.5)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (\text{ب } 3.5)$$

بلافاصله از رابطه (3.5b) نتیجه می‌گیریم که، اگر a و c هم علامت باشند ($\frac{c}{a} > 0$)، دو ریشه (α و β) متحد‌العلامه‌اند. از رابطه «3.5a» نتیجه می‌گیریم که علامت آنها مخالف علامت b می‌باشند. اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، ریشه‌ها نیز مختلف‌العلامه خواهند بود.

$$\text{ب) } f_7(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$(1) f_7(0) = 6$$

$$(2) \text{ اگر } x \rightarrow \pm\infty, f_7(x) \rightarrow +\infty$$

$$(3) f_7(x) = x^2 - 5x + 6 \equiv \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \\ \equiv \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

بنابراین $f_7(x)$ کمترین مقدار خود را به ازای $x = \frac{5}{2}$ ، که مساوی با $-\frac{1}{4}$ می‌باشد، به دست می‌آورد.

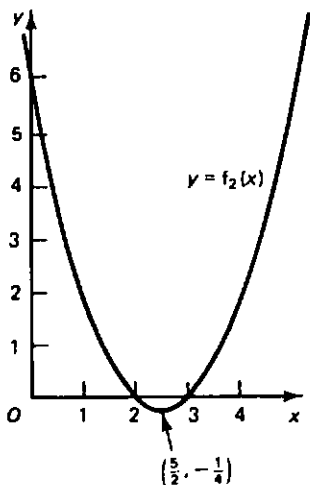
$$f_7(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 2$$

به روش دیگری ما می‌توانستیم $f_7(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم و بنویسیم.

$$f_7(x) = (x - 3)(x - 2)$$

$$\Rightarrow f_7(x) = 0 \text{ که } x = 3 \text{ یا } x = 2$$

نمودار $f_7(x)$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است.



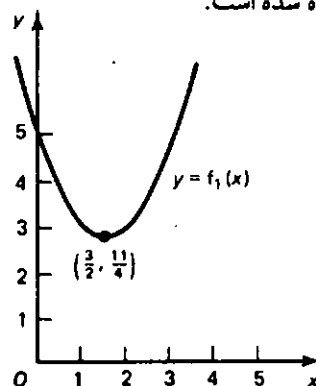
شکل ۳.۵

$$(1) f_1(0) = 5$$

$$(2) \text{ اگر } x \rightarrow \pm\infty, f_1(x) \rightarrow +\infty$$

$$(3) f_1(x) = x^2 - 3x + 5 \equiv \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 \\ \equiv \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$$

بنابراین $f_1(x)$ دارای کمترین مقدار خود به ازای $x = \frac{3}{2}$ بوده و مقدار آن برابر $\frac{11}{4}$ است، پس هیچگاه صفر نیست. نمودار $f_1(x)$ زیر نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴

$$(b) f_2(x) = x^2 - 5x + 6.$$

$$(i) f_2(0) = 6.$$

$$(ii) \text{ As } x \rightarrow \pm\infty, f_2(x) \rightarrow +\infty.$$

$$(iii) f_2(x) = x^2 - 5x + 6 = \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \\ = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

So $f_2(x)$ has a minimum value of $-\frac{1}{4}$ when $x = \frac{5}{2}$.

$$(iv) f_2(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ or } 2.$$

Alternatively we could write

$$f_2(x) = (x - 3)(x - 2) \\ \Rightarrow f_2(x) = 0 \text{ when } x = 3 \text{ or } 2.$$

The graph of $f_2(x)$ is shown in Fig. 3.5.