آموزش ترجمه متون ریاضی (۴)

ترجمه: حمید رضاامیری

Surds

Certain numbers of the set of numbers defined by $\sqrt{x}$, for $x \in Z^+$, have exact numerical values, e.g. $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, ... Other numbers of the set, e.g. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, cannot be written as numerically exact quantities, and it is frequently more convenient to leave them in their basic $\sqrt{x}$ form. As such, these numbers are called *surds*, and expressions involving them are called *surd expressions*. It is desirable to write such expressions in their simplest form. The examples below indicate how one should proceed. Two basic rules, derived from the rules of indices, are employed:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{(xy)} \quad [\text{from } x^{1/2}y^{1/2} = (xy)^{1/2}],$$

and

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)} \quad \left[\text{from } \frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}\right]$$

اعداد گنگ

تنها اعداد مشخصی از مجموعهٔ اعداد تعریف شده توسط $\sqrt{x}$ برای هر $x \in Z^+$، دارای مقادیر عددی درست می‌باشند، مانند $\sqrt{1}$، $\sqrt{4}$، $\sqrt{9}$، $\sqrt{16}$، $\sqrt{25}$ و ..... تعداد دیگری از اعداد این مجموعه مانند $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ به‌صورت کمیتهای درستِ عددی نوشته نمی‌شوند، و غالباً مناسبتر است آنها را به شکل اصلی خودشان یعنی $\sqrt{x}$ نمایش دهیم. چنین اعدادی را گنگ می‌نامیم، و عبارات شامل آنها را عبارات **گنگ** می‌نامند. شایسته است که چنین عباراتی به شکل ساده شدهٔ خودشان نوشته شوند. مثالهایی که در زیر آمده است چگونگی این روش را نشان می‌دهند. دو قاعدهٔ اساسیِ حاصل از دستورات مربوط به نماها (دراین دومثال) به کار رفته‌اند:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{xy} \quad [\text{از دستور } x^{1/2}y^{1/2} = (xy)^{1/2}]$$

و

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \left[\text{از دستور } \frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}\right]$$

Example 7 Reduce the following surd expressions to their simplest form:
(a) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$, (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2})$, (c) $(2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2)$,
(d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5}$.

(a) $\frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{1}{3}\sqrt{(9 \times 2)} = \frac{1}{3}3\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
(b) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(5\sqrt{2}) = 20$.
(c) $(2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2) = 6 \times 5 + 7\sqrt{5} + 2 = 32 + 7\sqrt{5}$.
(d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

مثال ۷

عباراتِ گنگ زیر را به‌ساده‌ترین شکل خود بیان کنید:

(الف) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ ، (ب) $2\sqrt{2}(\sqrt{32}+\sqrt{2})$

(پ) $(2\sqrt{5}+1)(3\sqrt{5}+2)$

(ت) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{5}$

(الف) $\frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{1}{3}\sqrt{(9\times 2)} = \frac{1}{3}3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

(ب) $2\sqrt{2}(\sqrt{32}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(5\sqrt{2}) = 20$

(پ) $(2\sqrt{5}+1)(3\sqrt{5}+2) = 6\times 5 + 7\sqrt{5} + 2 = 32 + 7\sqrt{5}$

(ت) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}+3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

Example 8 We remove the surds from the denominator in the following surd expressions (this process is called rationalising the denominator):

(a) $\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3.2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

We make use here of the identity

$$(x-y)(x+y) \equiv x^2 - y^2.$$

Multiplying numerator and denominator by $\sqrt{2}+1$, we obtain

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}.\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$

(c) $$\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}.\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{15}+2.3}{20-3} = \frac{4\sqrt{15}+6}{17}$$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

Rationalising each term, we obtain

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 3.$$

مثال ۸

در عبارات گنگ زیر اعداد گنگ را از مخرج کسر حذف می‌کنیم (این روش گویا کردن مخرج کسر نام دارد):

(الف) $$\frac{۲}{\sqrt{۱۸}} = \frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\times۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

(ب) $$\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

در این‌جا می‌توانیم ازاتحاد $(x-y)(x+y) \equiv x^۲ - y^۲$ استفاده کنیم. صورت و مخرج کسر را در $(\sqrt{۲}+۱)$ ضرب کرده، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}.\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱} = \sqrt{۲}+۱$$

(پ) $$\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}.\frac{۲\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}+\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۱۵}+۲\times۳}{۲۰-۳} = \frac{۴\sqrt{۱۵}+۶}{۱۷}$$

(ت) $$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱} + \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$$

هر دو کسر را با هم گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)} + \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)} =$$

$$\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳-\sqrt{۳}}{۲} = ۳$$

Logarithms

The term 'logarithm' is an alternative word for an index or power of a given positive number base. For example, since $2^3 = 8$, we define the index 3 to be the logarithm of 8 to the base 2 and write

$$3 = \log_2 8.$$

Further, using the rule of negative indices, $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ and we may write

$$\log_{1/3} 9 = -2.$$

The base of a logarithm may be any positive number. The tables of common logarithms, which are sometimes used for calculations, have base 10. It is usual, when using common logarithms, to omit the base 10, and write log or lg. In general,

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

لگاریتمها

کلمهٔ «لگاریتم» مفهوم دیگری است برای نمایش نما یا توان یک مبنای مثبت. برای مثال، نظر به این‌که $۸ = ۲^۳$، ما نمای ۳ را لگاریتم ۸ در مبنای ۲ تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم: $\log_{۲}^{۸} = ۳$

به‌علاوه، می‌توانیم از دستور نماهای منفی نیز استفاده کرده و مثلاً برای $۹ = (\frac{۱}{۳})^{-۲}$ می‌نویسیم: $\log_{\frac{۱}{۳}}^{۹} = -۲$

مبنای یک لگاریتم می‌تواند هر عدد مثبتی باشد. جداول لگاریتمهای اعشاری، که معمولاً برای محاسبات مورداستفاده قرار می‌گیرند، دارای مبنای ۱۰ هستند. معمولاً، برای استفاده از لگاریتم اعشاری، مبنای ۱۰ را حذف کرده، و آن را به‌صورت *log* یا *lg* می‌نویسیم. در حالت کلّی:

$$\boxed{a^x = y \Leftrightarrow \log_a^y = x}$$

Example 9 Express in logarithmic form (a) $5^2 = 25$, (b) $2^5 = 32$, (c) $6^0 = 1$, (d) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125$, (e) $10^{-2} = 0{\cdot}01$.

(a) $5^2 = 25 \Rightarrow 2 = \log_5 25$.
(b) $2^5 = 32 \Rightarrow 5 = \log_2 32$.
(c) $6^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_6 1$.
(d) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125 \Rightarrow -3 = \log_{1/5} 125$.
(e) $10^{-2} = 0{\cdot}01 \Rightarrow -2 = \log_{10} 0{\cdot}01$.

مثال ۹

(تساویها را) به شکل لگاریتمی نشان دهید:

(الف)$۵^۲ = ۲۵$, (ب)$۲^۵ = ۳۲$, (پ)$۶^۰ = ۱$, (ت)$(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵$,
(ث) $۱۰^{-۲} = ۰/۰۱$

(الف)$۵^۲ = ۲۵ \Rightarrow \log_۵^{۲۵} = ۲$

(ب) $۲^۵ = ۳۲ \Rightarrow \log_۲^{۳۲} = ۵$

(پ) $۶^۰ = ۱ \Rightarrow \log_۶^۱ = ۰$

(ت) $(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۵}}^{۱۲۵} = -۳$

(ث) $۱۰^{-۲} = ۰/۰۱ \Rightarrow \log_{۱۰}^{۰/۰۱} = -۲$

Example 10 Evaluate (a) $\log_4 64$, (b) $\log_{10} 0{\cdot}001$, (c) $\log_{1/2} 4$.

(a) Let $x = \log_4 64 \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3$.
Comparing indices gives $x = 3$.
(b) Let $y = \log_{10} 0{\cdot}001, \Rightarrow 10^y = 0{\cdot}001 = 10^{-3}$.
Therefore,

$$y = -3.$$

(c) Let $z = \log_{1/2} 4 \Rightarrow (\frac{1}{2})^z = 4 = 2^2 = (\frac{1}{2})^{-2}$.
Therefore,

$$z = -2.$$

مثال ۱۰

محاسبه کنید:

(الف) $\log_۴^{۶۴}$ (ب) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}$ (پ)$\log_{\frac{۱}{۲}}^{۴}$

(الف) فرض کنیم: $\log_۴^{۶۴} = x \Rightarrow ۴^x = ۶۴ = ۴^۳$

بامقایسهٔ نماها خواهیم داشت $x = ۳$.

(ب) فرض کنیم: $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = y \Rightarrow ۱۰^y = ۰/۰۰۱ = ۱۰^{-۳}$

بنابراین $y = -۳$.

(پ) فرض کنیم: $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۴} = z \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^z = ۴ = ۲^۲ = (\frac{۱}{۲})^{-۲}$

بنابراین $z = -۲$.

Example 11 Express in index form (a) $\log_5 125 = 3$, (b) $\log_{10} 100 = 2$, (c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$, (d) $\log_a 1 = 0$, (e) $\log_x y = z$.

(a) $\log_5 125 = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$.
(b) $\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$.
(c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2} \Rightarrow 36^{1/2} = 6$.
(d) $\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.
(e) $\log_x y = z \Rightarrow x^z = y$.

مثال ۱۱

(تساویها را) به شکل نمایی نشان دهید:

(الف)$\log_۵^{۱۲۵} = ۳$ (ب)$\log_{۱۰}^{۱۰۰} = ۲$ (پ) $\log_{۳۶}^{۶} = \frac{۱}{۲}$

(ت)$\log_a^۱ = ۰$ (ث)$\log_x^y = z$

(الف)$\log_۵^{۱۲۵} = ۳ \Rightarrow ۵^۳ = ۱۲۵$

(ب) $\log_{۱۰}^{۱۰۰} = ۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۱۰۰$

(پ) $\log_{۳۶}^{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (۳۶)^{۱/۲} = ۶$

(ت) $\log_a^۱ = ۰ \Rightarrow a^۰ = ۱$

(ث) $\log_x^y = z \Rightarrow x^z = y$

Rules of logarithms

(1) Addition of logarithms
If $\log_a x = m$ and $\log_a y = n$, then $x = a^m$, $y = a^n$ and

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\Rightarrow \log_a(xy) = m + n.$$

Therefore,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

(2) Subtraction of logarithms
Similarly,

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hence,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

(3) Logarithm of powers of numbers

$$x^p = (a^m)^p = a^{mp}.$$

Hence,

$$\log_a x^p = mp = p \log_a x.$$

Therefore,

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

(4) Change of base of a logarithm

$$\log_a x = m \Rightarrow a^m = x.$$
$$\log_b x = \log_b(a^m) = m \log_b a$$
$$\Rightarrow \log_b x = (\log_a x) \times (\log_b a),$$

قواعد لگاریتمها

(۱) جمع لگاریتمها

اگرقراردهیم $\log_a^x = m$ و $\log_a^y = n$ دراین‌صورت

$x = a^m$، $y = a^n$ و

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow \log_a^{(xy)} = m + n$$

بنابراین

$$\boxed{\log_a^{(xy)} \equiv \log_a^x + \log_a^y}$$

(۲) تفریق لگاریتمها

(باتوجه به قرارداد بالا) به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

بنابراین :

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) \equiv \log_a^x - \log_a^y}$$

(۳) لگاریتم از اعداد توانی

$$x^p \equiv (a^m)^p = a^{mp}$$

بنابراین :

$$\log_a^{x^p} = mp = p \log_a^x$$

پس :

$$\boxed{\log_a^{x^p} = p \log_a^x}$$

(۴) تغییر مبنای یک لگاریتم

$$\log_a^x \equiv m \Rightarrow a^m = x$$

$$\log_b^x \equiv \log_b(a^m) = m \log_b^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b^x \equiv (\log_a^x) \times (\log_b^a)}$$

i.e. to change the base of a logarithm of x from a to b we multiply by $\log_b a$.
If in this result we replace x by a, we get

$$\log_b a = (\log_a a) \times (\log_b a).$$

Dividing by $\log_b a$, given that this is non-zero,

$$\Rightarrow 1 = \log_a a,$$

and, if $x = b$,

$$\log_b b = 1 = (\log_a b) \times (\log_b a).$$

یعنی، برای تغییر مبنای لگاریتم x از مبنای a به b آن را در $\log_b^a$ ضرب می‌کنیم.

هرگاه در این نتیجه‌گیری جای x را با a تعویض کنیم، خواهیم داشت:

$$\log_b^a \equiv \log_a^a \times \log_b^a$$

باتقسیم طرفین بر $\log_b^a$، که مخالف صفر است :

$$\Rightarrow \log_a^a = ۱$$

و، اگر $x = b$:

$$\log_b^b \equiv ۱ \equiv (\log_a^b) \times (\log_b^a)$$

Example 12 Simplify

(a) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 3$,

(b) $\log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - 2 \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$.

(c) $3 \log_a x + 2 \log_a y - \log_a z$.

(a) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 3 = \log_a 2^4 + \log_a 3^2$ by rule (3),
$= \log_a 16 + \log_a 9 = \log_a 144$ by rule (1).

(b) $\log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - 2 \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$
$= \log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - \log_{10}\left(\frac{5^2}{3^2}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$ by rule (3),
$= \log_{10}\left(\frac{15}{64} \times \frac{9}{25} \times \frac{16}{9}\right)$ by rules (1) and (2),
$= \log_{10}\left(\frac{3}{20}\right)$.

(c) $3 \log_a x + 2 \log_a y - \log_a z$
$= \log_a x^3 + \log_a y^2 - \log_a z$ by rule (3),
$= \log_a\left(\frac{x^3 y^3}{z}\right)$ by rules (1) and (2).

مثال ۱۲

(عبارات زیر را) ساده کنید :

(الف) $۴\log_a ۲ + ۲\log_a ۳$

(ب) $\log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴}) - ۲\log_{۱۰}(\frac{۳}{۵}) + \log_{۱۰}(\frac{۱۶}{۹})$

(پ) $۳\log_a x + ۲\log_a y - \log_a z$

(الف) $۴\log_a ۲ + ۲\log_a ۳ = \log_a ۲^۴ + \log_a ۳^۲ \overset{\text{باتوجه به قاعده(۳)}}{=\!=}$
$\log_a ۱۶ + \log_a ۹ = \log_a ۱۴۴$

(ب) $\log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴}) - ۲\log_{۱۰}(\frac{۵}{۳}) + \log_{۱۰}(\frac{۱۶}{۹}) = \log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴})$
$\log_{۱۰}(\frac{۵^۲}{۳^۲}) + \log_{۱۰}(\frac{۱۶}{۹})$
$\overset{\text{باتوجه به قاعده(۳)}}{=\!=} \log_{۱۰}(\frac{۱۵}{۶۴} \times \frac{۹}{۲۵} \times \frac{۱۶}{۹}) \overset{\text{قواعد(۱) و (۲)}}{=\!=} \log_{۱۰}(\frac{۳}{۲۰})$

(پ) $۳\log_a x + ۲\log_a y - \log_a z = \log_a x^۳ + \log_a y^۳ - \log_a z$
$\overset{\text{قواعد(۱) و (۲) و (۳)}}{=\!=} \log \frac{x^۳ y^۳}{z}$

Example 13 Using only the rules of logarithms, find the value of $\log_3 125 \times \log_5 9$.

$\log_3 125 \times \log_5 9 = \log_3 5^3 \times \log_5 3^2$
$= 3 \log_3 5 \times 2 \log_5 3 = 6(\log_3 5)(\log_5 3)$
$= 6 \log_5 5 = 6.$

مثال ۱۳

فقط بااستفاده از قواعد لگاریتمها مقدار $\log_۳ ۱۲۵ \times \log_۵ ۹$ را بیابید.

$\log_۳ ۱۲۵ \times \log_۵ ۹ = \log_۳ ۵^۳ \times \log_۵ ۳^۲ = ۳\log_۳ ۵ \times ۲\log_۵ ۳$
$= ۶(\log_۳ ۵)(\log_۵ ۳) = ۶\log_۵ ۵ = ۶$

1.3 The logarithmic and exponential functions

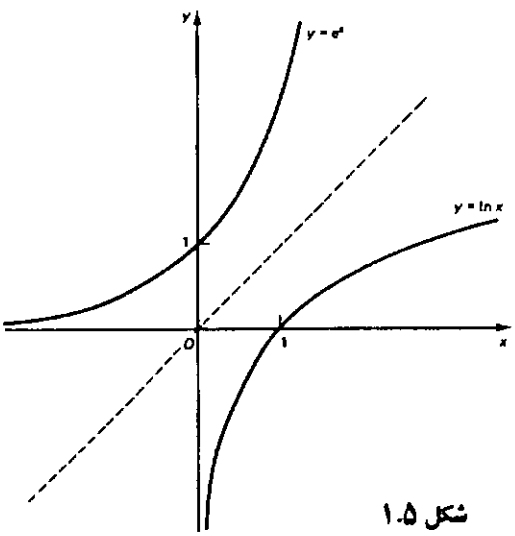
In calculus logarithms to a particular base are used. The logarithms are called *natural logarithms* and the base is denoted by e. The number e ≈ 2·718 281 8 and is defined as that base for which the function $\log_e x$ has unit gradient at $x = 1$. The standard notation is

$$\log_e x = \ln x.$$

The function $\ln x$ has domain $\mathbf{R}^+$ and is called the *logarithmic function*. The range of $\ln x$ is $\mathbf{R}$. Its inverse function is known as the *exponential function*, $\exp x$, which is denoted by e^x. The domain of the exponential function is $\mathbf{R}$ and its range is $\mathbf{R}^+$. To summarise,

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

The graphs of $y = e^x$ and $y = \ln x$ are given in Fig. 1.5. Note that, since e^x and $\ln x$ are inverse functions, their graphs are mirror images of each other in the line $y = x$ (shown dotted).



شکل ۱.۵

۱.۳ توابع لگاریتمی و نمایی

در حساب لگاریتمها از یک مبنای ویژه‌ای استفاده می‌شود. این نوع لگاریتم، لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود و مبنای آن با e نمایش داده می‌شود. عدد $e \approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸$ می‌باشد و آن به‌عنوان مبنایی برای تابع $\log_e^x$ درنظرگرفته شده که در $x = ۱$ دارای شیب واحدمی‌باشد. نمایش استاندارد آن به‌شکل $\log_e^x = lnx$ می‌باشد.

دامنهٔ تابع lnx، IR^+ است و آن را تابع لگاریتمی می‌نامند. بُرد این تابع IR است. تابع معکوس آن را تابع نمایی، (یا $e \times px$)، می‌نامیم که آن را به‌صورت e^x نمایش می‌دهند و دامنهٔ تابع نمایی IR و بُردش IR^+ است. به‌طور خلاصه:

$$y = lnx \Leftrightarrow e^y = x$$

نمودارهای $y = e^x$ و $y = lnx$ در شکل ۱.۵ آمده است. توجه کنید که، همواره e^x و lnx معکوس یکدیگرند، نمودارهای آنها نسبت به خط $y = x$ تصویر معکوس یکدیگر می‌باشند. (خط $y = x$ با نقطه‌چین مشخص شده‌است.)

Example 14 Simplify

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}}.$$

We notice that $\ln e = 1$, and, since $\ln 1 = 0$, we have $e^{\ln 1} = e^0 = 1$. Therefore,

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}.$$

Since

$$e^{2x} = (e^x)^2$$

we may write

$$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$$

and so

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x + 1} = e^x - 1.$$

مثال ۱۴

(کسر زیر را) ساده کنید:

$$\frac{e^{۲x} - lne}{e^x + e^{ln۱}}$$

توجه داریم که $lne = ۱$ و، چون $ln۱ = ۰$ داریم: $e^{ln۱} = e^۰ = ۱$، بنابراین:

$$\frac{e^{۲x} - lne}{e^x + e^{ln۱}} \equiv \frac{e^{۲x} - ۱}{e^x + ۱}$$

از آن‌جاکه $e^{۲x} \equiv (e^x)^۲$ می‌توان نوشت:

$$e^{۲x} - ۱ \equiv (e^x + ۱)(e^x - ۱)$$

و بنابراین:

$$\frac{e^{۲x} - lne}{e^x + e^{ln}} \equiv \frac{(e^x + ۱)(e^x - ۱)}{(e^x + ۱)} \equiv e^x - ۱$$

ادب و ریاضی

هیلبرت با این فکر که هر مسألهٔ ریاضی، بالاخره روزی حل خواهد شد، تصمیم گرفت که ثابت کند که چگونه می‌توان بدون رها کردن هیچ جزء از کشفیات سابق؛ مبناهای غیر قابل سنجشی به بیان ریاضیات داد و با دقت و استحکام ثابت کرد که محال است که استدلال مبتنی بر این مبناها به تناقض برخورد کند، و اگر توانست برنامه‌ای چنین با عظمت را به ثمر برساند (امروز شک دارند که چنین اثباتی امکان‌پذیر باشد)، اقلا" ثابت کرد که هیچ اندیشه‌ای روشن نیست مگر آن که بتوان آن را با علامتهای صریح (و بدیهی است که با تعداد محدود) بیان کرد، و با وجود این محدودیت، ریاضی‌دان کامل حق دارد که دربارهٔ بی‌نهایت استدلال کند.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه. پرویز شهریاری