آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲)

Methods of Algebra

J. E. Hebborn - C. Plumpton

ترجمه: حمیدرضا امیری

1 Algebraic functions

۱ ـ توابع جبری[۱]

1.1 Functions, composite functions and inverse functions

۱.۱ ـ توابع، توابع مرکب و توابع معکوس

A *function* is a mapping which associates with each element of one set A a unique element of another set B. The set A is called the *domain* of the function and the set B is called the *codomain* of the function. Not every element of the codomain need have a corresponding element in the domain, but every element of the domain must correspond to some element in the codomain.

The actual elements of the set B which are images of the elements of the domain are called the *range* (or range set) of the function.

We will only be concerned with functions which map a real variable x to a real variable y:

$$f: x \mapsto y = f(x).$$

تابع نگاشتی است که هر عضوِ مجموعه‌ای مانند A را به عضوِ منحصر به فردی از مجموعهٔ دیگری چون B مربوط می‌سازد. مجموعهٔ A را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ B را هم دامنهٔ تابع می‌نامیم. هر عضوِ هم دامنه، نیازی به یک عضوِ متناظر در دامنه ندارد، امّا هرعضو دامنه باید با عضوی در هم‌دامنه متناظر باشد.

[اعضایی از مجموعهٔ B که تصاویر اعضای دامنه باشند؛ بُرد (مجموعهٔ بُرد) تابع نامیده می‌شوند.]

در این جا تنها توابعی را در نظر می‌گیریم که متغیر حقیقی x را به متغیر حقیقی y تصویر کنند، یعنی: $f: x \to y = f(x)$

We usually refer to x as the *independent variable* and to y as the *dependent variable*.

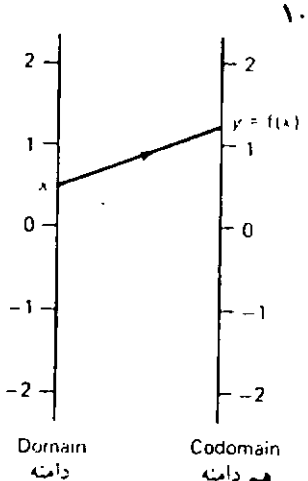
There are two important ways of representing a function f from **R** to **R** diagrammatically.

(i) The domain and codomain are represented by two parallel number lines with an arrow from x to its image $y = f(x)$ (see Fig. 1.1).

معمولاً x را متغیر آزاد و y را متغیر وابسته می‌نامیم.

به‌طریق نموداری دو روش مهّم برای نمایش تابع f از IR به IR وجود دارد.

روش اول: دامنه و هم دامنه به صورت دومحور موازی اعداد حقیقی همراه با پیکانی از x به تصویرش، $y=f(x)$ نمایش داده می‌شود. **شکل ۱.۱**



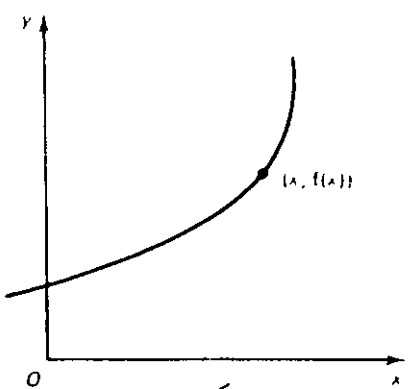
شکل ۱.۱

---

(۱) تابع $(y = f(x))$ را یک تابع جبری می‌نامند، هرگاه x و y در رابطه‌ای به صورت $F(x , y)=0$ صدق کند که $F(x , y)$ یک چند جمله‌ای برحسب x و y است.

(ii) Each element x of the domain and its image $f(x)$ form an ordered pair $[x, f(x)]$. This ordered pair can be represented by the coordinates (x, y) of a point in a cartesian plane. The set of all such points is called the *graph* of the function, and the relation $y = f(x)$ is called the equation of the graph or curve (see Fig. 1.2).

روش دوّم: هرعضوِ x از دامنه و تصویر آن عضو؛ یعنی $f(x)$، زوج مرتبِ $[x,f(x)]$ را تشکیل می‌دهند. این زوج مرتب می‌تواند توسط مختصات (x,y) به‌صورت یک نقطه در صفحهٔ مختصات دکارتی نمایش داده شود. مجموعهٔ چنین نقاطی نمودار تابع نامیده می‌شود و رابطهٔ $y=f(x)$ به معادلهٔ نمودار یا منحنی آن موسوم است (شکل ۱.۲).



شکل ۱.۲

A function f is said to be an *even* function if

$$f(x) = f(-x) \text{ for all values of } x.$$

A function f is said to be an *odd* function if

$$f(-x) = -f(x) \text{ for all values of } x.$$

تابعِ f را تابع زوج می‌نامیم هرگاه:

$$f(x) = f(-x) \quad (x^{(1)} \text{ به ازای جمیع مقادیر})$$

تابعِ f را تابع فرد می‌نامیم هرگاه:

$$f(-x) = -f(x) \quad (x \text{ به ازای جمیع مقادیر})$$

Example 1

(a) The mapping $x \to x^{1/2}$ does not define a function, since, for a given real number, there is not a unique element of the image set corresponding to it. (For each real value of x there are two elements of the image set corresponding to it, $+\sqrt{x}$ and $-\sqrt{x}$.)

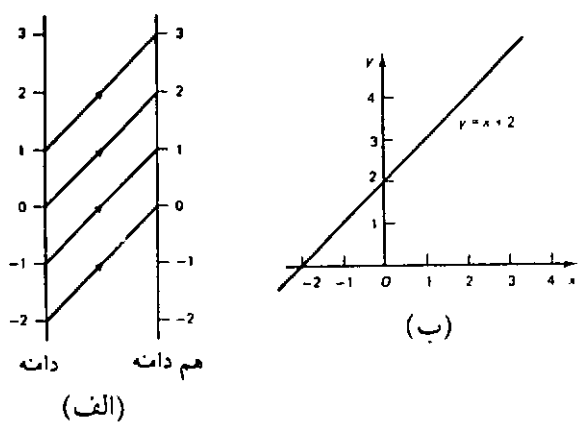
(b) The mapping $x \to x + 2$ is a function. The domain is the set **R** of real numbers, or some subset of **R**. The codomain is also the set of real numbers. It may be represented as in Fig. 1.3(a) or Fig. 1.3(b).

(۱) به شرطی که $x-$ در دامنه تابع باشد.

مثال ۱ :

(الف) نگاشت $x \to x^{1/2}$ تابعی را تعریف نمی‌کند. زیرا، به ازایِ عدد حقیقی مفروضی، مشاهده می‌شود که عضو منحصر به فردی متناظر با آن از مجموعهٔ تصویر (برد تابع) وجود ندارد. (متناظر با هر مقدار حقیقی مانند x دو عضو $\sqrt{x}+$ و $\sqrt{x}-$، از مجموعهٔ تصویر وجود دارد.)

(ب) نگاشت $x \to x+2$ یک تابع است. دامنهٔ این تابع IR، مجموعهٔ اعداد حقیقی یا زیرمجموعه‌ای از IR است. هم دامنهٔ آن نیز مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد. این تابع می‌تواند به صورت اشکالِ (الف) ۱.۳ و (ب) ۱.۳ نمایش داده شود.

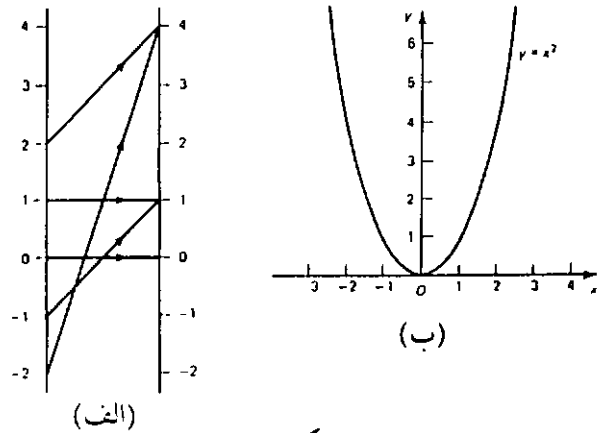


(الف) (ب)

شکل ۱.۳

(c) The mapping $x \to x^2$ is a function. The domain is **R** and the codomain is **R**. The range is the set $\{x: x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$. It may be represented as in Fig. 1.4(a) or Fig. 1.4(b).

(ج) نگاشت $x \to x^2$ یک تابع است. دامنهٔ آن IR و هم دامنهٔ آن نیز IR می‌باشد. برد این تابع مجموعهٔ $\{x: x \in IR, x \geq 0\}$ است. این تابع را می‌توان توسط اشکال (الف) ۱.۴ یا (ب) ۱.۴ نمایش داد.



شکل ۱.۴

Example 2 Determine whether the functions f, g, h, where (a) $f(x) = 3x^2$, (b) $g(x) = x - 2x^3$, (c) $h(x) = (x - 2)/(x + 2)$, are odd, even or neither.

(a) $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x) \Rightarrow$ f is even.
(b) $g(-x) = (-x) - 2(-x)^3 = -x + 2x^3 = -[x - 2x^3] = -g(x) \Rightarrow$ g is odd.
(c) $h(-x) = (-x - 2)/(-x + 2)$ and this is neither $h(x)$ nor $-h(x)$. Hence, $h(x)$ is neither odd nor even.

مثال ۲

مشخص کنید کدام یک از توابع f ، g ، h، که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، زوج یا فرد یا نه زوج و نه فرد هستند.

(الف) $f(x) = ۳x^۲$

(ب) $g(x) = x - ۲x^۳$

(ج) $h(x) = \dfrac{(x-۲)}{(x+۲)}$

(الف) $f(-x) = ۳(-x)^۲ = ۳x^۲ = f(x) \Rightarrow$ f زوج است

(ب) $g(-x) = (-x) - ۲(-x)^۳ = -x + ۲x^۳ =$

$-[x - ۲x^۳] = -g(x) \Rightarrow$ g فرد است

(ج) $h(-x) = \dfrac{(-x-۲)}{(-x+۲)}$

و این ضابطه نه مساوی با $h(x)$ است و نه مساوی با $-h(x)$. بنابراین $h(x)$ نه زوج است و نه فرد.

Composition of functions

It is possible, under certain circumstances, to combine functions. This is best illustrated by a simple example. Suppose

$$f: x \mapsto x^2$$

and

$$g: x \mapsto x + 1.$$

Then the composite function, written gf (note the order), means 'square x and then add 1' — i.e. f first, followed by g:

$$gf: x \mapsto x^2 + 1.$$

This is not the same as fg, which means 'add 1 to x and then square':

$$fg: x \mapsto (x + 1)^2.$$

In order for it to be possible to form a composite function gf, the image set of the function f must be the domain of the function g or a subset of this domain.

ترکیب توابع

ترکیب توابع؛ تحت شرایطی معین، امکان‌پذیر است. این موضوع را می‌توان با مثالی ساده به بهترین وضعی توضیح داد. فرض کنیم $f : x \to x^۲$ و $g : x \to x+۱$.

در این صورت ترکیب این دو تابع که به صورت gf (به ترتیب نوشتن توجه داشته باشید) نوشته‌می‌شود به معنی این است که :

«ابتدا x به توان دو رسیده و سپس با ۱ جمع می‌شود» - یعنی اول f و به دنبال آن g : «ابتدا تابع f روی x اثر کرده و سپس g روی حاصل آن تأثیر می‌کند»

$$gf : x \to x^۲+۱$$

ترکیب این دو تابع به‌صورت fg که «x و ۱ با هم جمع شده و سپس به توان دو می‌رسند» با gf یکی نیست.

$$fg : x \to (x+۱)^۲$$

بعلاوه برای امکان ترکیب تابع به شکل gf می‌بایست، مجموعهٔ تصویرِ تابع f دامنه یا زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ تابعِ g باشد.

Example 3 If $f: x \mapsto x^2 + 5$, $g: x \mapsto x + 2$, then
(a) $gf: x \mapsto (x^2 + 5) + 2 \equiv x^2 + 7$,
(b) $fg: x \mapsto (x + 2)^2 + 5 \equiv x^2 + 4x + 4 + 5 = x^2 + 4x + 9$,
(c) $ff: x \mapsto (x^2 + 5)^2 + 5 \equiv x^4 + 10x^2 + 25 + 5 = x^4 + 10x^2 + 30$,
(d) $gg: x \mapsto (x + 2) + 2 \equiv x + 4$.

Note that

$$[f(x)]^2 = (x^2 + 5)^2 \equiv x^4 + 10x^2 + 25$$

and this is not the result of applying the mapping ff to x.

مثال ۳

اگر $f : x \to x^2+5$ و $g : x \to x+2$، آنگاه خواهیم داشت:

(الف) $gf: x \to (x^2+5)+2 \equiv x^2+7$

(ب) $fg : x \to (x+2)^2+5 \equiv x^2+4x+4+5 = x^2+4x+9$

(پ) $ff: x \to (x^2+5)^2+5 \equiv x^4+10x^2+25+5 =$
x^4+10x^2+30

(ت) $gg: x \to (x+2)+2 \equiv x+4$

توجه کنید که: $[f(x)]^2 = (x^2+5)^2 \equiv x^4+10x^2+25$ و این با نتیجهٔ به کارگیری نگاشت ff روی x یکسان نمی‌باشد.

Identities and equations

The reader will note that in the above example we have used the symbol $\equiv$, which is to be read as 'is identical with'. We use this symbol when we have an algebraic relation which is true for all values of the variable x. For example,

$$(x + 2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4.$$

Such an algebraic relation is called an *identity*.

On the other hand, the expression

$$(x + 2)^2 = 9x - 2$$

is only true when $x = 2$ or $x = 3$. An algebraic relation which is only true for a particular set of values of x is called an *equation*.

اتحادها و معادلات

خواننده توجه دارد که درمثال بالا، ما از نماد ≡ استفاده کردیم و آن به صورتِ «متحدٌ است با» خوانده می‌شود. ما از این نماد زمانی استفاده می‌کنیم که رابطه‌ای جبری داشته باشیم و آن رابطه به ازای جمیع مقادیر برای متغیر x برقرار باشد. برای مثال:

$(x+2)^2 \equiv x^2+4x+4$

چنین رابطهٔ جبری را یک اتحاد می‌نامیم.

ازطرف دیگر، عبارت $(x+2)^2 = 9x-2$ فقط زمانی درست است که $x=2$ یا $x=3$. یک رابطهٔ جبری را که فقط به ازای مجموعه‌ای خاص از مقادیر x درست است معادله می‌نامیم.

ترجمه برخی اصطلاحات و لغات

Function	تابع
Mapping	نگاشت
Cartesian Plane	صفحهٔ مختصات دکارتی
Equation	معادله
Curve	منحنی
Determine	مشخص کردن
Even	زوج
Odd	فرد
Suppose	فرض کردن
Composition	ترکیب
Composite	مرکب
Certain	معین
Circumstances	شرایط
Illustrated	تصور
Isidentical with	متحداست با
Identity	اتحاد
Expression	عبارت
Associate	مربوط ساختن
Element	عنصر ـ عضو
Unique	منحصربفرد
Domain	دامنه
Codomain	هم‌دامنه
Corresponding	متناظر
Image	تصویر
Real Variable	متغیرحقیقی
Independent Variable	متغیر مستقل
Dependent Variable	متغیر وابسته
Diagrammatically	به‌صورت نموداری
Parallel	موازی
Ordered Pair	زوج مرتب
Represent	نمایش دادن
Coordinates	مختصات