آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

Vector Algebra

P. Gusyatnikov and S. Reznichenko

غلامرضا یاسی‌پور

خوانندهٔ عزیز! هما نطور که در سرمقالهٔ شمارهٔ پیش وعده داده بودیم از این شماره به بعد قسمتی از مجله را به ترجمهٔ متون ریاضی اختصاص می‌دهیم در آن سعی بر این داریم که اولا متنی را انتخاب کنیم که به کار دروس ریاضی شما بیاید و ثانیا آن را چنان ارائه دهیم که به آموزش فن ترجمه کمك کند و به این ترتیب با یك عمل به دو هدف برسیم و برای این کار هم متن اصلی را که به زبان انگلیسی است می‌آوریم و هم ترجمهٔ آن را و هم معانی فارسی اصطلاحات آن را ، بنابراین لازم است که خوانندهٔ علاقه‌مندی که مایل به آموختن فن ترجمه است ابتدا اصطلاحات مزبور را بیاموزد وسپس به ترجمه بپردازد و در آخر آن را با ترجمهٔ داده‌شده مقایسه کند و خطاهای احتمالی خود را بیابد و در ضمن از آموختن موضوع آمده شده در متن غافل نماند و توفیق از خداوند متعال است.

Complex Numbers

Sec. 5.1. Complex Numbers and Operations on Them

اعداد مختلط

بخش ۱. اعداد مختلط و اعمال راجع به آنها

Consider the set C whose elements are all possible ordered pairs z of real numbers: (a, b), $a \in R$, $b \in R$. Let us introduce into this set the notion of equality of elements and define the basic arithmetic operations in the following way.

Let z_1 be an ordered pair (a_1, b_1), and z_2 an ordered pair (a_2, b_2). The ordered pairs z_1 and z_2 are said to be *equal* (written: $z_1 = z_2$) if and only if $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. In other words, $z_1 = z_2$ if and only if z_1 and z_2 represent the same ordered pair of real numbers.

مجموعهٔ C ، که عناصرش جمیع جفتهای ممکن اعداد حقیقی z اند ، یعنی، (a, b) و $a \in R$ و $b \in R$ ، را در نظر می گیریم. در این مجموعه و به‌طریق زیر، مفهوم تساوی عناصر را معرفی و اعمال‌حسابی اساسی (چهار عمل اصلی حساب) را تعریف می کنیم.

فرض می کنیم z_1 جفت مرتب (a_1, b_1) ، و z_2 جفت مرتب (a_2, b_2) باشد. جفتهای مرتب z_1 و z_2 را مساوی می گویند (و $z_1 = z_2$ می نویسند) اگر و تنها اگر $a_1 = a_2$ ، $b_1 = b_2$. به عبارت‌دیگر، $z_1 = z_2$ اگر و تنها اگر z_1 و z_2 یك جفت مرتب از اعداد حقیقی را نمایش دهند.

The *sum* $z_1 + z_2$ of ordered pairs $z_1 = (a_1, b_1)$ and $z_2 = (a_2, b_2)$ is defined as an ordered pair $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. The *product* z_1z_2 of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as an ordered pair $(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.

For example, if $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (5, -3)$, then $z_1 + z_2 = (1 + 5, 2 + (-3)) = (6, -1)$, $z_1z_2 = (1\cdot 5 - 2\cdot(-3), 1\cdot(-3) + 2\cdot 5) = (11, 7)$.

The *difference* $z_1 - z_2$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as an ordered pair $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$. If $a_2^2 + b_2^2 >$

0), then the *quotient* $\frac{z_1}{z_2}$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as the ordered pair

$$\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right).$$

For example, if $z_1=(0, 5)$ and $z_2=(1, -2)$ then $z_1-z_2=(0-1, 5-(-2))=(-1, 7)$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(0, 5)}{(1, -2)}=\frac{0\cdot 1+5\cdot(-2)}{1^2+(-2)^2}, \quad \frac{-0\cdot(-2)+5\cdot 1}{1^2+(-2)^2}=(-2, 1).$$

مجموع z_1+z_2 ی جفتهای مرتب $z_1=(a_1, b_1)$ و $z_2=(a_2,b_2)$ به صورت جفت مرتب (a_1+a_2, b_1+b_2) تعریف می‌شود . z_1z_2 حاصل‌ضرب جفتهای مرتب z_1 و z_2 به صورت‌جفت مرتب $(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)$ تعریف شده است.

به عنوان مثال: اگـر $z_1=(1,2)$ ، $z_2=(5,-3)$ ، در این صورت:

$$z_1+z_2=(1+5,2+(-3))=(6,-1)$$

$$z_1z_2=(1\cdot 5-2\cdot(-3),$$

$$1\cdot(-3)+2\cdot 5)=(11,7)$$

z_1-z_2 ، تفاضل جفتهای مرتب z_1 و z_2 بـه صورت جفت مـرتب (a_1-a_2, b_1-b_2) تعریف می‌شود . اگـر $a_2^2+b_2^2>0$ این‌صورت، $\frac{z_1}{z_2}$ ، خارج قسمت جفتهای مرتب z_1 و z_2 ، به صورت‌جفت مرتب:

$$\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

تعریف می‌شود.

به عنوان مثال : اگر $z_1=(0,5)$ و $z_2=(1,-2)$ ، دراین صورت:

$$z_1-z_2=(0-1,5-(-2))=(-1,7)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(0,5)}{(1,-2)}=$$

$$\frac{0\cdot 1+5\cdot(-2)}{1^2+(-2)^2}, \frac{-0\cdot(-2)+5\cdot 1}{1^2+(-2)^2}=(-2,1)$$

A set C of ordered pairs $z=(a, b)$ of real numbers $a\in R$, $b\in R$ in which the notion of equality and arithmetic operations are introduced by the above method is called the set of *complex numbers*. Any element $z=(a, b)\in C$ is termed a *complex number*.

A complex number of the form $(a, 0)$, where a is a real number, is identified with the real number a itself and is denoted by the same letter, that is, we write $(a, 0)=a\in R$. In such identification, the operations on real numbers and complex numbers corresponding to them are agreed: if $a_1\in R$, $a_2\in R$, then

$$(a_1, 0)\pm(a_2, 0)=(a_1\pm a_2, 0)=a_1\pm a_2;$$

$$(a_1, 0)\cdot(a_2, 0)=(a_1a_2-0\cdot 0, a_1\cdot 0+0\cdot a_2)$$

$$=(a_1a_2, 0)=a_1a_2;$$

$$a_2\neq 0\Rightarrow\frac{(a_1, 0)}{(a_2, 0)}=\left(\frac{a_1a_2+0\cdot 0}{a_2^2+0^2}, \frac{-a_1\cdot 0+0\cdot a_2}{a_2^2+0^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_2}, 0\right)=\frac{a_1}{a_2}.$$

مجموعهٔ C ازجفتهای‌مرتب $z=(a,b)$ از اعدادحقیقی $a\in R$ ، $b\in R$ کـه در آن مفهوم تساوی و اعمال حسابی، بـا استفاده‌از روش‌فوق، معرفی‌شده‌اند مجموعهٔ‌اعدادمختلط نامیده می‌شود . هرعنصر $z=(a, b)\in C$ ، به عدد مختلط مصطلح است .

عدد مختلط به‌صورت $(a,0)$ ، که در آن a عددی‌حقیقی است، باخود عدد حقیقی a یکی‌است و با همین حرف نمایش داده می‌شود، یعنی، می نویسیم

$$(a,0)=a\in R$$

دریکی سازی‌ای چنین، اعمال راجع بـه اعداد حقیقی واعداد مختلط متناظر با آنها سازگارند:اگر $a_1\in R$ ، $a_2\in R$، در این صورت:

$$(a_1,0)\pm(a_2,0)=(a_1\pm a_2,0)=a_1\pm a_2$$

$$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1a_2-0\cdot 0,a_1\cdot 0+0\cdot a_2)$$

$$=(a_1a_2,0)=a_1a_2$$

$$a_2\neq 0\Longrightarrow\frac{(a_1,0)}{(a_2,0)}=$$

$$\left(\frac{a_1a_2+0\cdot 0}{a_2^2+0^2}, \frac{-a_1\cdot 0+0\cdot a_2}{a_2^2+0^2}\right)=\left(\frac{a_1}{a_2},0\right)=\frac{a_1}{a_2}$$

The complex number (0, 1) is called the *imaginary unit*; it is denoted by i:

$$i = (0, 1).$$

The complex number $0 = (0, 0)$ is called *zero*.

The elements of the set C are sometimes called simply numbers (if it is clear that complex numbers are meant).

The operations of finding the sum and difference of complex numbers z_1 and z_2 are called the addition and subtraction of the numbers z_1 and z_2, respectively, and the operations of finding the product and quotient of the complex numbers z_1 and z_2 the multiplication and division of the number z_1 by the number z_2, respectively. The division of a complex number z by the complex number 0 is not defined. The product of the complex numbers z_1 and z_2 is sometimes denoted by $z_1 \cdot z_2$. For any natural number n the *power* z^n of the complex number z is determined by induction in the following way: $z^1 = z$, $z^n = z \cdot z^{n-1}$, $n \geqslant 2$.

If $z = (a, b)$ is a complex number, then the complex number $(-a, -b)$ is said to be *opposite* to the complex number z and is symbolized as $-z$. The complex number $(a, -b)$ is called the *complex conjugate* of the number z; it is denoted by $\bar{z}$. The *modulus* $|z|$ of a complex number $z = (a, b)$ is defined as a nonnegative real number $\sqrt{a^2 + b^2}$. Thus,

$$z = (a, b) \Rightarrow -z = (-a, -b), \quad \bar{z} = (a, -b),$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

عدد مختلط $(\text{۰}, \text{۱})$ به واحد انگاری موسوم است؛ و با i نمایش داده می‌شود:

$$i = (\text{۰}, \text{۱})$$

عدد مختلط $(\text{۰}, \text{۰}) = \text{۰}$ به صفر موسوم می‌باشد.

عناصر مجموعهٔ C را گاهی (ودرصورتی که آشکار باشد که به معنی عدد مختلط‌اند) به‌طور ساده عدد می‌نامند.

اعمال یافتن مجموع و تفاضل اعداد مختلط $z_\text{۱}$ و $z_\text{۲}$، به ترتیب، جمع و تفریق اعداد $z_\text{۱}$ و $z_\text{۲}$ نامیده‌می‌شوند، و اعمال پیداکردن حاصل‌ضرب وخارج‌قسمت دوعدد مختلط $z_\text{۱}$ و $z_\text{۲}$، به ترتیب به ضرب و تقسیم عدد $z_\text{۱}$ و عدد $z_\text{۲}$ موسومند. تقسیم عدد مختلط z برعدد مختلط ۰ تعریف نشده است. حاصل‌ضرب اعداد مختلط $z_\text{۱}$ و $z_\text{۲}$، گاهی، با $z_\text{۱} \cdot z_\text{۲}$ نمایش‌داده می‌شود. توان z^n از عدد مختلط z، به ازای‌هرعدد طبیعی n، با استفاده از استقرا و به‌طریق زیر معین می‌شود:

$$z^\text{۱} = z, \quad z^n = z \cdot z^{n-\text{۱}}, \quad n \geqslant \text{۲}$$

اگر $z = (a, b)$ عددی مختلط باشد، دراین‌صورت عدد مختلط $(-a, -b)$ را مقابل عدد مختلط z می‌گویند و به صورت $-z$ علامتی می‌کنند. عدد مختلط $(a, -b)$ به مزدوج مختلط عدد z موسوم است؛ وبا $\bar{z}$ نمایش داده می‌شود. $|z|$، قدر مطلق عدد مختلط $z = (a, b)$ به‌صورت عددحقیقی نامنفی $\sqrt{a^\text{۲} + b^\text{۲}}$ تعریف‌شده است. به این‌ترتیب،

$$z = (a, b) \Longrightarrow -z = (-a, -b),$$
$$\bar{z} = (a, -b)$$
$$|z| = \sqrt{a^\text{۲} + b^\text{۲}}$$

If $z = (a, 0) = a \in R$, then $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$, that is, the modulus of a complex number identified with a real number a is equal to the absolute value of the real number a.

Example 5.1.1. Prove that if $z = -z$, then $z = 0$, if $z = \bar{z}$, then $z \in R$.

$\triangle$ Let $z = (a, b)$, $z = -z$, that is, $(a, b) = (-a, -b)$. By the definition of equality of complex numbers, $a = -a$, $b = -b$, $2a = 2b = 0$. Thus, $a = b = 0$, $z = (a, b) = (0, 0) = 0$.

If $z = \bar{z}$, that is $(a, b) = (a, -b)$, then $a = a$, $b = -b$. In this case $2b = 0$, $b = 0$. This means that $z = (a, b) = (a, 0) = a \in R$. ▲

Example 5.1.2. Prove that for any real numbers c and d $(d \neq 0)$ and any complex number $z = (a, b)$ the following equalities are fulfilled:

$$cz = (ca, cb), \quad \frac{z}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \qquad (5.1)$$

(on the right-hand side of these equalities, c and d are understood as real numbers, whereas on the left-hand side as complex numbers $(c, 0)$ and $(d, 0)$).

$$\triangle \; c \cdot z = (c, 0)(a, b) = (ca - 0 \cdot b, \; cb + 0 \cdot a) = (ca, cb);$$
$$\frac{z}{d} = \frac{(a, b)}{(d, 0)} = \left(\frac{ad + b \cdot 0}{d^2 + 0^2}, \frac{-a \cdot 0 + bd}{d^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

The formula (5.1), in particular, implies that

$$1 \cdot z = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = z, \; (-1) \cdot z = ((-1) \cdot a, (-1) \cdot b) = (-a, -b) = -z,$$
$$\frac{z}{1} = \left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right) = (a, b) = z,$$
$$\frac{z}{-1} = \left(\frac{a}{-1}, \frac{b}{-1}\right) = (-a, -b) = -z. \qquad (5.2)$$

اگر $z=(a,0)=a\in R$ ، دراین صورت:

$$|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$$

یعنی، قدرمطلق عدد مختلط یکسان با عددحقیقی a ، برابر قدر مطلق عددحقیقی a است.

مثال ۱۰۱. ثابت کنید که اگر $z=-z$ ، در این صورت $z=0$ ، اگر $z=\bar{z}$ ، دراین‌صورت $z\in R$.

Δ فرض می‌کنیم $z=(a,b)$ ، $z=-z$ ، یعنی،

$$(a,b)=(-a,-b)$$

بنا به تعریف تساوی اعداد مختلط ، $a=-a$ ، $b=-b$ ، $2a=2b=0$. به این ترتیب، $a=b=0$ ،

$$z=(a,b)=(0,0)=0$$

اگر $z=\bar{z}$ ، یعنی $(a,b)=(a,-b)$ ، دراین‌صورت $a=a$، $b=-b$. دراین‌حالت $2b=0$، $b=0$. این بدان معنی است که

$$z=(a,b)=(a,0)=a\in R \quad \Delta$$

مثال ۱۰۲. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی c و d، $(d\neq 0)$ و هرعدد مختلط $z=(a,b)$ ، تساویهای زیر برقرارند:

$$cz=(ca,cb),\qquad \frac{z}{d}=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) \qquad (1)$$

(c و d ، در سمت‌راست این تساویها ، به صورت اعداد حقیقی درنظر گرفته می‌شوند، درحالی‌که در سمت‌چپ آنها، به‌صورت اعداد مختلط $(c,0)$ و $(d,0)$ دانسته می‌شوند).

Δ

$$c\cdot z=(c,0)(a,b)=(ca-0\cdot b,\ cb+0\cdot a)$$
$$=(ca,cb)$$

$$\frac{z}{d}=\frac{(a,b)}{(d,0)}=\left(\frac{ad+b\cdot 0}{d^2+0^2},\frac{-a\cdot 0+bd}{d^2+0^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)\ \Delta$$

فرمول (۱)، درحالت خاص، مستلزم این‌است که:

$$1\cdot z=(1\cdot a,1\cdot b)=(a,b)=z\ ,$$

$$(-1)\cdot z=((-1)\cdot a,(-1)\cdot b)=$$
$$(-a,-b)=-z$$

$$\frac{z}{1}=\left(\frac{a}{1},\frac{b}{1}\right)=(a,b)=z$$

$$\frac{z}{-1}=\left(\frac{a}{-1},\frac{b}{-1}\right)=(-a,-b)=-z \qquad (2)$$

Example 5.1.3. Prove that for any complex numbers $z_1=(a_1, b_1)$ and $z_2=(a_2, b_2)$ the following relationships are fulfilled (here and henceforward, the operations in the parentheses are to be performed first):

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2); \qquad (5.3)$$
$$z_2\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad (5.4)$$

Δ Indeed, $z_1+(-z_2)=(a_1, b_1)+(-a_2, -b_2)=(a_1+(-a_2), b_1+(-b_2))=(a_1-a_2, b_1-b_2)=z_1-z_2$.

مثال ۱. ۳. ثابت کنید که به‌ازای هرعدد مختلط

$$z_1=(a_1,b_1) \text{ و } z_2=(a_2,b_2)$$

روابط زیر برقرارند (در اینجا و از این مرحله به بعد، باید ابتدا اعمال داخل پرانتزها انجام شوند):

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2) \qquad (3)$$

$$z_2\neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2} \qquad (4)$$

Δ در واقع :

$$z_1+(-z_2)=(a_1,b_1)+(-a_2,-b_2)=$$
$$(a_1+(-a_2)\ ,\ b_1+(-b_2))=$$
$$(a_1-a_2\ ,\ b_1-b_2)=z_1-z_2$$

Example 5.1.4. Prove that for any complex number $z = (a, b)$ the following equality is fulfilled:

$$z = a + bi. \qquad (5.5)$$

Conversely, if a and b are real numbers and $z = a + bi$, then $z = (a, b)$.

□ If $a \in R$, $b \in R$, then, by the formula (5.1), $bi = b \cdot (0, 1) = (b \cdot 0, b \cdot 1) = (0, b)$. Therefore $a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$.

The notation (5.5) of a complex number $z = (a, b)$ is called the *algebraic form of the notation* of the number z. The numbers $a \in R$ and $b \in R$ in the algebraic notation (5.5) of the complex number z are given specific names. The number a is called the *real part* of the complex number z (written: $a = \operatorname{Re} z$), and the number b the *imaginary part* of the complex number z (written: $b = \operatorname{Im} z$). It is readily checked that

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2,$$
$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2.$$

مثال ۱ .۴. ثابت کنید که به‌ازای‌هر عدد مختلط

$$z = (a, b)$$

تساوی زیر برقرار است:

$$z = a + bi \qquad (۵)$$

برعکس، اگر a و b اعدادی حقیقی و $z = a + bi$، دراین صورت $z = (a, b)$.

اگر $a \in R$، $b \in R$، دراین‌صورت، بنابه‌فرمول (۱)،

$$bi = b \cdot (0, 1) = (b \cdot 0, b \cdot 1) = (0, b)$$

بنابراین:

$$a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$$

نماد (۵) عدد مختلط $z = (a, b)$ به صورت جبری. نماد عدد z موسوم است. به اعداد $a \in R$ و $b \in R$ واقع در نماد جبری (۵) عدد مختلط z، نامهای خاصی داده شده‌است. عدد a به جزء حقیقی عدد مختلط z موسوم است (و $a = \operatorname{Re} z$ نوشته می‌شود)، و عدد b جزء انگاری عدد مختلط z نامیده (و $b = \operatorname{Im} z$ نوشته) می‌شود. به سادگی می‌توان امتحان کرد که:

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2$$
$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2$$

Further,

$$\frac{1}{z_2} = \frac{(1, 0)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-1 \cdot b_2 + 0 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right).$$

By the formula (5.1),

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right) = \frac{1}{z_2}.$$

Finally,

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1, b_1) \cdot (a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 \cdot (b_2),\ a_1 \cdot (-b_2) + b_1 a_2)}{|z_2|^2}$$
$$= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|z_2|^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{|z_2|^2}\right) = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \frac{z_1}{z_2}.$$

گذشته از این:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{(1, 0)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-1 \cdot b_2 + 0 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)$$

بنابه فرمول (۱):

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right) = \frac{1}{z_2}$$

سرانجام:

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1, b_1) \cdot (a_2, -b_2)}{|z_2|^2}$$
$$= \frac{(a_1 a_2 - b_1 \cdot (b_2),\ a_1 \cdot (-b_2) + b_1 a_2)}{|z_2|^2}$$
$$= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|z_2|^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{|z_2|^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) = \frac{z_1}{z_2} \quad \Delta$$

If Im $z = 0$, then, as we agreed above, the number $z = a + 0 \cdot i = (a, 0)$, is a real number a. The complex numbers $z = (0, b) = 0 + bi = bi$, whose real part is equal to zero, are called *pure imaginary*. The number $0 = 0 + 0i$ is both real and pure imaginary at the same time.

In what follows the notation (5.5) will be understood only as an algebraic notation of the complex number $z = (a, b)$, that is, the numbers a and b in the notation (5.5) will be regarded only as real numbers, although it will not be stipulated.

It is obvious that if $z = (a, b) = a + bi$, then $\bar{z} = a - bi$.

Example 5.1.5. Prove that

$$i^2 = -1 \qquad (5.6)$$

$$\Delta i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

اگر $\mathrm{Im}\, z = 0$ ، در این صورت، همان‌گونه که در فوق قرار گذاشتیم، عدد:

$$z = a + 0 \cdot i = (a, 0)$$

عدد حقیقی a است. عدد مختلط $z = (0, b) = 0 + bi = bi$، که جزءحقیقیش برابرصفر است، انگاری محض نامیده‌می‌شود. عدد $0 = 0 + 0i$ در آن واحد هم حقیقی، هم انگاری محض است.

درآنچه‌که بعداز این می‌آید، نماد (۵)، تنها به عنوان نمادجبری عدد مختلط $z = (a, b)$ دانسته می‌شود، یعنی اعداد a و bی واقع‌درنماد (۵) تنها‌به عنوان اعدادی حقیقی در نظر گرفته می‌شوند، گرچه به‌آن تصریح نخواهد شد.

واضح است‌که اگر: $z = (a, b) = a + bi$ ، در این صورت $\bar{z} = a - bi$.

مثال ۵.۱. ثابت کنید که:

$$i^2 = -1 \qquad (۶)$$

$$i^2 = i.i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \ ▲$$

ترجمهٔ بعضی لغات و اصطلاحات

Complex Numbers	اعداد مختلط
Operations	اعمال
Set	مجموعه
Element	عنصر
Ordered Pairs	جفتهای مرتب
Real Numbers	اعدادحقیقی
Equality	تساوی، برابری
Basic	اساسی
Addition	جمع
Subtraction	تفریق
Multiplication	ضرب
Division	تقسیم
Natural Number	عدد طبیعی
Power	توان
Induction	استقرا
Opposite	مقابل
Complex Conjugate	مزدوج مختلط
Modulus	قدر مطلق
Nonnegative	نامنفی
Absolute Value	قدر مطلق
To Prove	اثبات کردن
Formula	فرمول
Relation	رابطه
Notation	نماد
Algebraic Form	صورت جبری
Algebraic Notation	نماد جبری
Real Part	جزء حقیقی
Imaginary Part	جزء انگاری
Pure Imaginary	انگاری محض
Arithmetic Operations	اعمال حسابی
Equal	مساوی، برابر
Sum	مجموع
Product	حاصل‌ضرب
Difference	تفاضل
Quotient	خارج‌قسمت
Notion	مفهوم
Method	روش
Imaginary Unit	واحد انگاری یا موهومی
Zero	صفر