آموزش ترجمه متون ریاضی(۱۸)

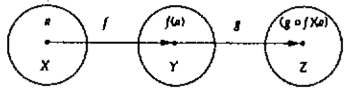
● حمیدرضا امیری

10. Composition of Functions

Suppose there are two functions $f : X \longrightarrow Y$ and $g : Y \longrightarrow Z$ in which the domain of g is the codomain of f. Then we denote the composition of these two functions as $g \circ f$, a function mapping X to Z defined as follows:

(10.1) $$\forall a \in X, (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

(10.1F)



(10.2) The notation $g \circ f$ may seem backward, but it is necessary because we put the argument of the function on the right-hand side. From the sketch (10.1F) you see that f is the function we must apply first. From a we go to $f(a)$. From $f(a)$ we go to $g(f(a))$. We call this function $g \circ f$ and write

$$g \circ f : X \longrightarrow Z.$$

۱۰. ترکیب تابعها

فرض کنیم دو تابع $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ وجود داشته باشند، به طوری که دامنهٔ g هم دامنهٔ f باشد. سپس ترکیب این دو تابع را با نماد gof نمایش داده و آن تابعی است که طبق تعریف زیر X را به Z می‌نگارد:

$$\forall a \in X \ , \ (gof)(a) = g(f(a))$$

ممکن است نماد gof (با توجه به نمودار) یک رابطهٔ پَسرو (برگشتی) به نظر برسد، اما ضروری می‌باشد، زیرا ما شناسهٔ تابع را (a را) در سمت راست قرار می‌دهیم. از نمودار (۱۰.۱F) درمی‌یابید، f تابعی است که می‌بایست اول از آن استفاده کنیم. از a به f(a) می‌رویم. از f(a) به g(f(a)) می‌رویم. ما این تابع را gof نامیده و می‌نویسیم: $gof : X \to Z$.

(If, as some do, we wrote the arguments of our functions on the left, we would denote the same composition as $f \circ g$ and define it as $((a)f)g$. See (18).)

(10.3) You have seen the composition of functions before, as for example $\log(1 + x)$, which is the composition of the logarithm function g with the function f defined by the rule $f(x) = 1 + x$ for all real $x > -1$. Here is another example: a program (f) that acts on the input (a) to produce a value ($f(a)$), which is then taken as the input to a subroutine (g).

(اگر از اول، ما شناسهٔ تابعهایمان را در سمت چپ آنها می‌نوشتیم می‌بایست برای نمایش همان ترکیب، نمایش fog را به کار ببریم و آن را به صورت g((a)f) تعریف کنیم (۱۸ را مشاهده کنید).

شما قبلاً ترکیب تابعها را دیده‌اید، به طور مثال لگاریتم $\log(1+x)$ به صورت ترکیب تابع لگاریتم g با تابع f که با ضابطهٔ $f(x) = 1 + x$ برای هر عدد حقیقی $x > -1$ تعریف شده است. در اینجا مثال دیگری عنوان می‌کنیم:

برنامهٔ (f) که روی ورودی (a) اثر کرده و مقدار حاصل‌ضربی (f(a)) را به دست می‌دهد و سپس این مقدار به عنوان ورودی زیر برنامهٔ (g) در نظر گرفته می‌شود.

The *chain rule* in calculus tells you how to get the derivative of a composition of functions $g \circ f$ in terms of the derivatives of the functions f and g. In our notation, if the prime ′ denotes derivative, the chain rule is

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Thus to find $(\sin^2 x)'$ we have, for all $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := x^2$$
$$f(x) := \sin x.$$

Then $(g \circ f)(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x$. The derivatives: $g'(x) = 2x$ and $f'(x) = \cos x$. By the chain rule $(g' \circ f)(x) := g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2 \sin x$; multiply these by $f'(x) = \cos x$ to get the result $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$.

قاعدهٔ زنجیری در حساب دیفرانسیل و انتگرال برای شما بیان می‌کند که مشتق‌گیری از ترکیب تابعها یعنی gof بر حسب مشتقهای تابعهای f و g است.

در نمادگذاری ما، اگر پریم نشان دهندهٔ مشتق باشد، قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر است:

$$(gof)' = (g'of).f'$$

بنابراین برای یافتن $(\sin^2 x)'$ خواهیم داشت، برای هر $x \in R$

$$g(x) := x^2$$

$$f(x) := \sin x$$

بنابراین:

$$(gof)(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x.$$

مشتق: $g'(x) = 2x \;,\; f'(x) = \cos x.$

با توجه به قاعدهٔ زنجیری

$$(g'of)(x) := g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2\sin x$$

با ضرب مقدار حاصل در $f'(x) = \cos x$ نتیجه بدست می‌آید: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$

Proposition (10.4) The composition of injections [surjections] is injective [surjective].[1] ▪

The proof, omitted here, is a nice exercise.

Corollary (10.5) The composition of bijections is a bijection.

قضیهٔ (۱۰.۴)

ترکیب ـ تابعهای ـ یک به یک [پوشا] تابعی یک به یک [پوشا] می‌باشد. در اینجا اثبات که تمرین خوبی می‌باشد حذف شده است.

نتیجه (۱۰.۵)

ترکیب ـ تابعهای ـ دو سویی یک تابع دو سویی است.

Proposition (10.6) The inverse of a composition is the composition of the inverses in reverse order:

$$(\widehat{g \circ f})^{-1} = \hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1}.$$

Proof Notice first that this claim makes sense, because $(\widehat{g \circ f})^{-1}$, with the above choice of notation in (10.1*F*) for domains and codomains, is a function from $\mathcal{P}(Z)$ to $\mathcal{P}(X)$, and $\hat{g}^{-1}$ maps $\mathcal{P}(Z)$ to $\mathcal{P}(Y)$, and $\hat{f}^{-1}$ maps $\mathcal{P}(Y)$ to $\mathcal{P}(X)$.

قضیهٔ (۱۰.۶)

معکوس یک ترکیب عبارت است از ترکیب معکوسها با ترتیب عکس:

$$(\widehat{gof})^{-1} = \hat{f}^{-1} o \hat{g}^{-1}$$

اثبات

در ابتدا توجه کنید که این ادعا مفهومی را می‌سازد، زیرا $(\widehat{gof})^{-1}$، با انتخاب بالا از نمادگذاری(۱۰.۱F) برای دامنه‌ها و هم دامنه‌ها، تابعی است از P(Z) به P(X)، و g^{-1} می‌نگارد P(Z) را به P(Y)، و f^{-1} می‌نگارد P(Y) را به P(X).

Let us prove the claim (10.6) of equality between functions. We have just observed that both have the same domain and codomain. We now must show that

$$\forall C \subseteq Y, (\widehat{g \circ f})^{-1}(C) = (\hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1})(C). \qquad (10.7)$$

We can transform the left side of (10.7) into the right side more easily than you might think:

$$\begin{aligned}(\widehat{g \circ f})^{-1}(C) &:= \{a;\, a \in X, (g \circ f)(a) \in C\}\\ &:= \{a;\, a \in X, g(f(a)) \in C\}\\ &:= \{a;\, a \in X, f(a) \in \hat{g}^{-1}(C)\}\\ &:= \{a;\, a \in X, a \in \hat{f}^{-1}(\hat{g}^{-1}(C))\}\\ &:= (\hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1})(C).\end{aligned}$$

QED

بیایید ادعای (۱۰.۶) از برابری بین تابعها را ثابت کنید. دیدیم که هر دو ـ تابع ـ دامنه و هم دامنهٔ مشابه دارند. حال می‌بایست نشان دهیم که

$$\forall C \subseteq Y \;,\; (\widehat{gof})^{-1}(\hat{C}) = (f^{-1} o g^{-1})(\hat{C})$$

ما بسیار ساده‌تر از آنچه شما ممکن است فکر کنید، سمت چپ رابطهٔ (۱۰.۷) را به سمت راست تبدیل می‌کنیم:

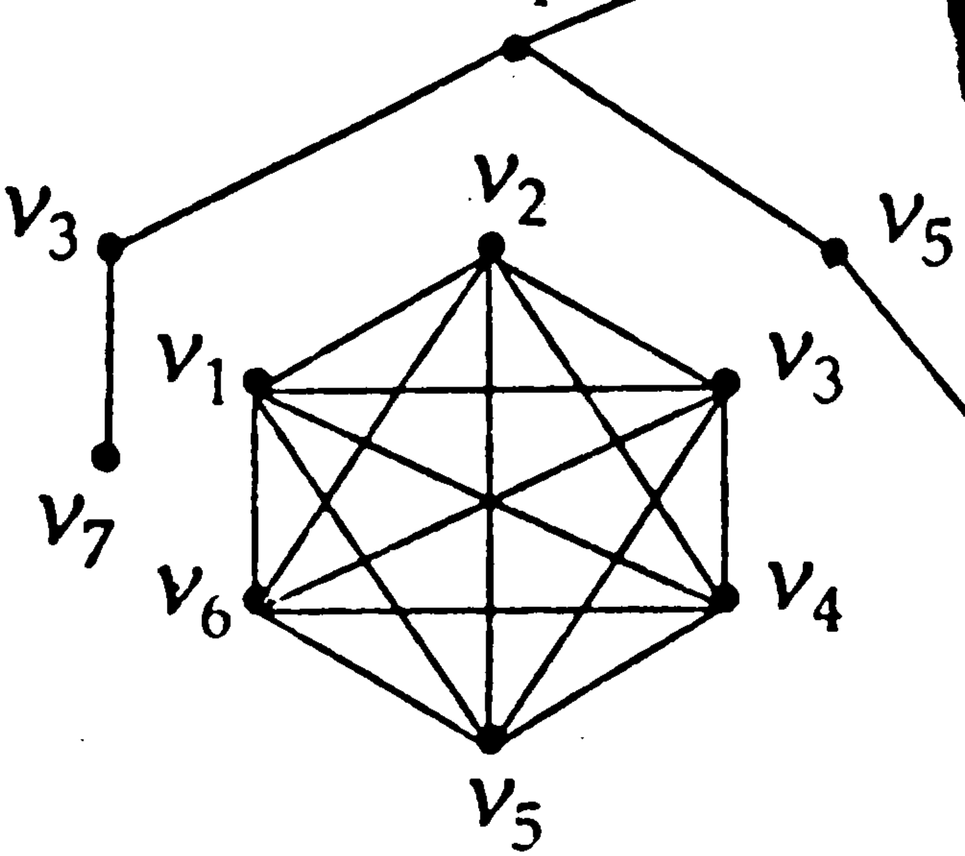
$$\begin{aligned}(\widehat{gof})^{-1}(C) &:= \{a; a \in X, (gof)(a) \in C\}\\ &:= \{a; a \in X, g(f(a)) \in C\}\\ &:= \{a; a \in X, f(a) \in \hat{g}^{-1}(C)\}\\ &:= \{a; a \in X, a \in \hat{f}^{-1}(\hat{g}^{-1}(C))\}\\ &:= (\hat{f}^{-1} o \hat{g}^{-1})(c)\end{aligned}$$

●ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات گسسته

RALPH P. GRIMALDI

(قسمت هفتم)



اکنون با بازگشت به بررسی روشهای اثبات قضایا (یا استلزامهای منطقی)، باید نگاهی محتاطانه به اندازهٔ جدول ۱۳.۲ بیندازیم. جدول مزبور دارای هشت سطر است، زیرا می‌توانیم سه فرض p_1 ، p_2 و p_3 و نتیجهٔ q را بر حسب سه گزارهٔ p ، r و s نمایش دهیم. اگر، فی‌المثل، با اثبات این موضوع که

$$[(p\to r)\wedge(r\to s)\wedge(t\vee\bar{s})\wedge(\bar{t}\vee u)\wedge\bar{u}]\to\bar{p}$$

استلزام منطقی (یا قضیه) است یا خیر، مواجه شویم، جدول مورد نیاز به $32 = 2^5$ سطر نیاز خواهد داشت. این رهیافت، چون تعداد فرضها بیشتر شوند و جدولهای ارزشمان به ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ سطر یا بیشتر افزایش یابد، کارآیی خود را به سرعت از دست می‌دهد.

گذشته از این، با یکبار دیگر نگریستن به جدول ۱۳.۲، درمی‌یابیم که در تشخیص این که

$$[(p\to r)\wedge(\bar{s}\to p)\wedge\bar{r}]\to s$$

استلزامی منطقی است یا نه، تنها به بررسی سطرهایی از جدول نیاز داریم که در آنها هر یک از سه فرض $p\to r$ ، $\bar{s}\to p$ و $\bar{r}$ ارزش راستی ۱ دارد. (به خاطر داشته باشید در صورتی که گزارهٔ سمت چپ یک شرطی دروغ باشد، اهمیتی به گزارهٔ سمت راست آن نمی‌دهیم.) و این تنها در سطر دوم جدول رخ می‌دهد، و بنابراین در واقع مقدار زیادی از جدول ۱۳.۲ ضروری نیست. (همواره چنین نیست که تنها یک سطر جمیع فرضها را راست داشته باشد.)

در نتیجه، آنچه در این مرحله مورد نیاز است، تکنیک یا فهرستی از تکنیکهایی است که به گونه‌ای لزوم رسم جدولهای ارزش، مخصوصاً جدولهای ارزش بزرگ، را کنار می‌گذارد. این تکنیکها به *قواعد استنتاج*[1] موسوم‌اند، و به طریق زیر به کمکمان می‌آیند:

۱. استفاده از این تکنیک توانایمان می‌کند که تنها به بررسی حالتهایی که در آنها جمیع فرضها راست‌اند بپردازیم. در نتیجه تنها سطرهایی از جدول ارزش را در نظر می‌گیریم که در آنها هر فرض دارای ارزش راستی ۱ است و جدول ارزش مربوطه را رسم نمی‌کنیم.

۲. قواعد استنتاج در توسعهٔ *اثباتهای* مرحله به مرحله، با نشان این که چگونه نتیجهٔ q منطقاً از فرضهای p_1 ، p_2 ، p_3 ، ... ، p_n واقع در استلزام

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge .... \wedge p_n) \rightarrow q$

به دست می‌آید، اساسی‌اند.

توسعه‌ای چنین درستی اثبات (یا *استدلال*[۲]) مان را محقق می‌کند.

هر یک از قاعده‌های استنتاج از استلزامی منطقی یا هم‌ارزی‌ای منطقی رخ می‌دهد، و استلزام منطقی یا هم ارزی‌ای منطقی مزبور، در هر حالت، بدون اثبات بیان می‌شود.

قواعد استنتاج بسیاری در بررسی منطق روی می‌دهند، و ما به آنهایی توجه می‌کنیم که به کمکشان در اثبات قضایای مورد بحثمان نیاز داریم. قواعدی را که هم اکنون تحقیقشان را آغاز می‌کنیم در آینده، در جدول ۲. ۱۴ خلاصه خواهیم کرد.

مثال ۱۸.۲

به عنوان اولین مثال قاعدهٔ استنتاج موسوم به *قیاس استثنایی*[۳]، یا *قاعدهٔ فاصل*[۴] را بررسی می‌کنیم. این قاعده به صورت علامتی با استلزام منطقی

$[\ p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$

بیان می‌شود.

قاعدهٔ واقعی را به صورت جدول شکل

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore\ \ q \end{array}$$

می‌نویسیم، که سه نقطه ($\therefore$) ی آن به جای کلمهٔ «بنابراین» قرار گرفته است، و مقرر می‌کند که q دنبالهٔ منطقی فرضهای p و $p \rightarrow q$ است، که در بالای خط افقی ظاهر شده‌اند. نیز می‌گوییم که فرضها (گزاره‌های بالای خط افقی) *استدلال* درست[۵] یا *اثبات*[۶]، نتیجهٔ q را به دست می‌دهند.

این قاعده در وضعیتهایی رخ می‌دهد که در آنها استدلال می‌کنیم که *اگر* (۱) p راست باشد، و (۲) $p \rightarrow q$ راست باشد (یا $p \Rightarrow q$)، *آنگاه* نتیجهٔ q نیز باید راست باشد. (به هر حال، اگر q دروغ و p راست باشد، نمی‌توانیم $p \rightarrow q$ را راست داشته باشیم.)

اثبات زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان قاعدهٔ انفصال را در هندسهٔ دبیرستان به کاربرد.

(۱) مثلث ABC متساوی الاضلاع است. $\qquad p$

(۲) اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $\qquad p \rightarrow q$

(۳) بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است. $\qquad \therefore\ q$

مثال ۱۹.۲

دومین قاعدهٔ استنتاج با استلزام منطقی

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow p \rightarrow r$

داده می‌شود، که p، q، و r آن هر سه گزاره‌اند. این قاعده به صورت جدول شکل چنین نوشته می‌شود.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ \ p \rightarrow r \end{array}$$

این قاعده، که به آن به عنوان *قانون قیاس*[۷] اشاره می‌شود، در اثباتهای بسیار و استدلالهای ریاضی دیگر رخ می‌دهد. در واقع، همان طور که راه حل (اثبات) زیر مبرهن می‌کند، از آن به دفعات بسیار در حل معادلات جبری استفاده می‌کنیم.

(۱) اگر $۳x - ۷ = ۲۰$، آنگاه $۳x = ۲۷$ $\qquad p \rightarrow q$

(۲) اگر $۳x = ۲۷$، آنگاه $x = ۹$ $\qquad \underline{q \rightarrow r}$

(۳) بنابراین، اگر $۳x - ۷ = ۲۰$، آنگاه $x = ۹$ $\qquad \therefore\ p \rightarrow r$

مثال بعد شامل اثبات اندکی طولانیتری است که قواعد استنتاج مطرح در مثالهای ۱۸.۲ و ۱۹.۲ را به کار می‌برد. در واقع، در این مثال در می‌یابیم که ممکن است در تحقیق درستی

یک استدلال بیش از یک راه موجود باشد.

مثال۲.۲۰

استدلال زیر را در نظر بگیرید.

(۱) در مثلث ABC، طولهای اضلاع AB و AC مساوی‌اند.	p
(۲) اگر مثلث ABC دارای دو ضلع مساوی باشد، آنگاه مثلث مزبور متساوی‌الساقین است.	$p \to q$
(۳) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زوایای مقابل به اضلاع متساوی الطول مساوی‌اند.	$q \to r$
(۴) بنابراین، زوایای B و C در مثلث ABC مساوی‌اند.	$\therefore\ r$

با تمرکز بر صورتهای گزاره‌های استدلال پیشین، می‌توان آن را به گونه‌ای فشرده‌تر به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \qquad (*) \\ q \to r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

اکنون نیازی به نگران بودن در این مورد که گزاره‌ها عملاً به جای چه مواردی قرار گرفته‌اند نیست، و هدفمان استفاده از دو قاعدهٔ استنتاجی که تاکنون بررسی کرده‌ایم برای استنتاج راستی گزارهٔ r از راستی سه فرض p، $p \to q$، و $q \to r$ است.

اثباتمان به طریق زیر تقریر می‌شود:

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to q$
فرض	(۲) $q \to r$
این گزاره از مراحل (۱) و (۲) و قانون قیاس نتیجه می‌شود	(۳) $p \to r$
فرض	(۴) p
این گزاره از مراحل (۴) و (۳) و قاعدهٔ انفصال نتیجه می‌شود.	(۵) $\therefore\ r$

پیش از پرداختن به قانون سوم استنتاج، نشان می‌دهیم که می‌توان اثبات دومی در مورد استدلال ارائه شده در (*) به دست داد. در اینجا «دلایل» مان به صورتی مختصر می‌شود که آن را در باقی این بخش مورد استفاده قرار خواهیم داد، و در هر حال، هر چه را که برای مبرهن کردن این مطلب لازم باشد که چگونه هر مرحلهٔ یک اثبات از مراحل پیشین به دست آمده، یا نتیجه شده است، ثبت می‌کنیم.

اثبات دوم استدلال فوق عبارت است از:

دلایل	مراحل
فرض	(۱) p
فرض	(۲) $p \to q$
(۱)، (۲)، و قاعدهٔ انفصال	(۳) q
فرض	(۴) $q \to r$
(۳)، (۴) و قاعدهٔ انفصال	(۵) $\therefore\ r$

مثال ۲.۲۱

قاعدهٔ موسوم به *انفصال نقیض*[۸] به صورت زیر است:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{q} \\ \hline \therefore\ \overline{p} \end{array}$$

این قاعده از استلزام منطقی $[(p \to q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$ نتیجه می‌شود.

از این قاعده در طرح اثبات استدلال زیر بهره می‌گیریم:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ t \vee \overline{s} \\ \overline{t} \vee u \end{array}$$

$\bar{u}$

$\overline{}$

$\therefore\ \bar{p}$

هم انفصال نقیض هم قانون قیاس، همراه با همارزی منطقی مطرح در مثال ۲ .۶ به صحنه می‌آیند.

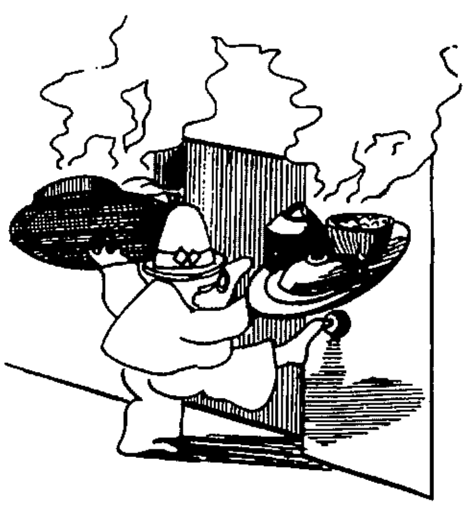
دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to r$ ، $r \to s$
(۱) و قانون قیاس	(۲) $p \to s$
فرض	(۳) $t \vee \bar{s}$
(۳) و قانون تعویضپذیری	(۴) $\bar{s} \vee t$
(۴) و هم ارزی منطقی $\bar{s} \vee t$	(۵) $s \to t$
(۲) ، (۵) و قانون قیاس	(۶) $p \to t$
فرض	(۷) $\bar{t} \vee u$
(۷) و همارزی منطقی $\bar{t} \vee u$	(۸) $t \to u$
(۶)، (۸) و قانون قیاس	(۹) $p \to u$
فرض	(۱۰) $\bar{u}$
(۹)، (۱۰)، و انفصال نقیض	(۱۱) $\therefore\ \bar{p}$

یادداشتها

1. Rules of inference
2. Argument
3. Modus Ponenes
4. Rules of Detachment
5. Valid arguments
6. Proof
7. Law of the Syllogism
8. Modus Tollens

تفریح اندیشه۳

مهرداد و آرش برای خوردن شام به رستوران رفته بودند. برای مهرداد ۵ ظرف و برای دوستش ۳ ظرف غذا آوردند. در همین موقع دوستشان، علی، سر رسید و آنها غذایشان را با او تقسیم کردند. علی پس از صرف غذا، سهم خود را که ۱۶ تومان بود پرداخت. در صورتی که بهای تمام غذاهای سفارش داده شده برابر باشد، مهرداد و آرش هر کدام چه مبلغی از این ۱۶ تومان را دریافت کرده‌اند؟



جواب در صفحهٔ ۸۸