

آموزش

ترجمه

متون ریاضی (۱۷)

حمیدرضا امیری

دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

$$(۱.۴) y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\equiv y = mx + c$$

$$c = y_1 - mx_1, m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادله P_1P_2

که

Other important results

Straight lines with gradients m_1, m_2 are perpendicular

$$\Leftrightarrow m_1 m_2 = -1. \quad (1.5)$$

Perpendicular distance of (x_1, y_1) from $ax + by + c = 0$ is

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1.6)$$

(The expression $ax_1 + by_1 + c$ is positive or negative depending on whether (x_1, y_1) is on one side of the line or the other; e.g., the points $(-2, 3)$ and $(1, 1)$ are on opposite sides of the line $5x - 2y + 1 = 0$ since $5(-2) - 2(3) + 1 < 0$ and $5(1) - 2(1) + 1 > 0$.)

نتایج مهم دیگر

دو خط با ضریب زاویه‌های m_1 و m_2 بر یکدیگر عمودند

$\Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$ (۱.۵) فاصله عمودی نقطه (x_1, y_1) از خط

$ax + by + c = 0$ عبارت است از،

$$(۱.۶) \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(عبارت $ax_1 + by_1 + c$ یا مثبت است و یا منفی، بستگی به

این که (x_1, y_1) در یک طرف خط یا در طرف دیگر خط واقع باشد. به عنوان مثال، نقاط $(-2, 3)$ و $(1, 1)$ در دو طرف

مقابل از خط $5x - 2y + 1 = 0$ قرار دارند، به طوری که

$$5 \times 1 - 2 \times 1 + 1 > 0, 5 \times (-2) - 2 \times 3 + 1 < 0$$

1.1 Elementary results in coordinate geometry

If $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ and $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, we obtain the following results directly from Fig. 1.1.

$$\text{Distance } P_1 P_2 \quad \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \quad (1.1)$$

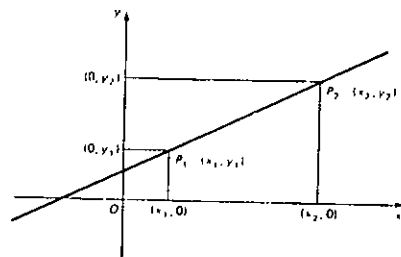
$$\text{Gradient of } P_1 P_2 \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1.2)$$

$$\text{Mid-point of } P_1 P_2 \quad \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (1.3)$$

$$\text{Equation of } P_1 P_2 \quad y - y_1 = m(x - x_1), \quad (1.4)$$

$$\equiv y = mx + c,$$

where $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, and $c = y_1 - mx_1$.



شکل ۱.۱

۱.۱ نتایج مقدماتی در هندسه تحلیلی

اگر $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ و $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ما نتایج زیر را

مستقیماً از شکل ۱.۱ به دست می‌آوریم.

$$(۱.۱) \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \quad \text{فاصله } P_1 P_2$$

$$(۱.۲) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ضریب زاویه } P_1 P_2$$

$$(۱.۳) \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad \text{نقطه وسط (میانی) } P_1 P_2$$

بنابراین خط خواسته شده عبارت است از

$$3x + y - 5 - \frac{2}{3}(8x - 3y - 19) = 0$$

$$\equiv 7x - 9y = 23$$

Exercise 1.1

1 Find an equation of the straight line which passes through the intersection of the lines

$$5x - 7y + 1 = 0, \quad 3x + 9y - 5 = 0$$

and which passes through the origin.

2 The points A and B have coordinates $(3, 0)$ and $(0, -3)$. Given that the area of the triangle ABP is $4\frac{1}{2}$ units², find the equations of the two lines on which P can lie.

3 Show that the equation

$$(4x + 3y - 6) + \lambda(2x - 5y - 16) = 0$$

represents a straight line for any value of λ .

Find the value of λ when the line

(a) passes through the origin.

(b) is parallel to the line $5x - 6y - 11 = 0$,

(c) is perpendicular to the line $x + 4y = 0$.

4 The points A, B, C and D have coordinates $(3, 8), (2, 1), (12, -4)$ and $(10, 12)$ respectively. The mid-point of CD is P .

(a) Find an equation of the line BP .

(b) The lines AC and BP meet at Q . Find the coordinates of Q .

(c) The line through B , perpendicular to AC , meets AC at R . Find the coordinates of R and the distance BR .

(d) Hence, or otherwise, calculate the area of the triangle ABQ .

تمرین ۱.۱

۱- معادله خطی را بیابید که از محل تقاطع دو خط

$$5x - 7y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad 3x + 9y - 5 = 0$$

مبدأ مختصات بگذرد.

۲- نقاط A و B دارای مختصات $(3, 0)$ و $(0, -3)$ می‌باشند.

فرض کنیم مساحت مثلث ABP ، $\frac{1}{4}$ واحد مربع است.

معادله دو خطی را بیابید که نقطه P می‌تواند روی آنها واقع باشد.

۳- نشان دهید معادله

$$(4x + 3y - 6) + \lambda(2x - 5y - 16) = 0$$

برای هر مقدار λ یک خط مستقیم را نمایش می‌دهد. مقدار λ را بیابید، وقتی که خط

(الف) از مبدأ مختصات عبور می‌کند،

(ب) با خط $5x - 6y - 11 = 0$ موازی است،

(پ) برخط $x + 4y = 0$ عمود است.

۴- نقاط A, B, C, D به ترتیب دارای مختصات $(3, 8), (2, 1), (12, -4)$ و $(10, 12)$ می‌باشند.

نقطه وسط CD ، P است.

(الف) معادله خط BP را بیابید.

(ب) خطهای AC و BP در Q تلاقی می‌کنند. مختصات نقطه

Example 1 Find an equation of that line through the meet of the lines $3x + y - 5 = 0, 8x - 3y - 19 = 0$ which is perpendicular to the line

$$9x + 7y - 4 = 0.$$

Method (i): Solving $3x + y - 5 = 0, 8x - 3y - 19 = 0$ we have $x = 2, y = -1$. Gradient of $9x + 7y - 4 = 0$ is $-9/7$; hence the gradient of a perpendicular line is $7/9$.

An equation of the required line is

$$y + 1 = \frac{7}{9}(x - 2)$$

$$\equiv 7x - 9y = 23.$$

مثال ۱: معادله خطی را بیابید که از محل تلاقی دو خط

$$3x + y - 5 = 0 \quad \text{و} \quad 8x - 3y - 19 = 0$$

$$9x + 7y - 4 = 0$$

روش اول: با حل $3x + y - 5 = 0$ و $8x - 3y - 19 = 0$

(در یک دستگاه) داریم، $x = 2$ و $y = -1$. ضریب زاویه خط

$$9x + 7y - 4 = 0 \quad \text{است} \quad \frac{-9}{7}$$

بر آن $\frac{7}{9}$ خواهد بود.

معادله خط خواسته شده عبارت است از

$$y + 1 = \frac{7}{9}(x - 2)$$

$$\equiv 7x - 9y = 23$$

Method (ii): We use an important idea in coordinate geometry. The equation

$$(3x + y - 5) + \lambda(8x - 3y - 19) = 0,$$

where λ is any non-zero constant, is that of a straight line through the meet of $3x + y - 5 = 0$ and $8x - 3y - 19 = 0$, since the coordinates of this point clearly satisfy the equation for any value of λ . The gradient of this line is $(3 + 8\lambda)/(3\lambda - 1)$. Hence the line is perpendicular to $9x + 7y - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + 8\lambda}{3\lambda - 1} = \frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9(3 + 8\lambda) = 7(3\lambda - 1)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}.$$

Hence the required line is

$$3x + y - 5 - \frac{2}{3}(8x - 3y - 19) = 0$$

$$\equiv 7x - 9y = 23.$$

روش دوم: از یک ایده مهم در هندسه مختصاتی استفاده

می‌کنیم. معادله $(3x + y - 5) + \lambda(8x - 3y - 19) = 0$ که در

آن λ یک مقدار ثابت ناصفر می‌باشد، معادله یک خط مستقیم

است که از محل تلاقی $3x + y - 5 = 0$ و $8x - 3y - 19 = 0$

عبور می‌کند، و واضح است که مختصات این نقطه (محل تلاقی)

به‌ازای هر مقدار λ در معادله صدق می‌کند. ضریب زاویه این

خط $\frac{(3 + 8\lambda)}{(3\lambda - 1)}$ است. از آن‌جا که خط بر $9x + 7y - 4 = 0$ عمود است.

$$\Leftrightarrow \frac{3 + 8\lambda}{3\lambda - 1} = \frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9(3 + 8\lambda) = 7(3\lambda - 1) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

Q را بیاید.

(پ) خطی از B عبور کرده، بر AC عمود است، AC را در R تلاقی می‌کند. مختصات R و فاصله BR را بیاید.

(ت) سپس، یا از طرف دیگر، مساحت مثلث ABQ را محاسبه کنید.

(الف) مختصات F را،

(ب) معادله خط BC را،

(پ) مختصات محل تلاقی خط AC با محور Xها

(ت) معادله خطی که از B عبور کرده و بر FC عمود باشد.

* چون عدد حاصل از کسر فوق نشان‌دهنده فاصله است و فاصله نمی‌تواند منفی باشد باید همواره قدر مطلق عدد حاصل را در نظر بگیریم.

- 5 The parallelogram $OABC$ lies in the first quadrant. The angle OAC is 90° and $OA = 15$. The equation of the straight line through O and A is $4y - 3x = 0$ and the equation of the straight line through O and C is $3y - 4x = 0$. Find
- the coordinates of A ,
 - an equation of the straight line through A and C ,
 - the coordinates of C ,
 - the coordinates of B .
- 6 The points $(6, 13)$, $(0, 3)$ and $(5, 0)$ are the three vertices A , B and C , respectively, of a parallelogram $ABCD$.
- Calculate the coordinates of D .
 - Prove that $ABCD$ is a rectangle.
 - Calculate the ratio of the length of AB to the length of BC .
 - The point P lies on CD and the area of the triangle PBC is one quarter of the area of the rectangle $ABCD$. Find the coordinates of P and an equation of the line BP .
- 7 The points A , B , C have coordinates $(0, 2)$, $(1, 4)$ and $(3, -1)$ respectively. Given that $ABFC$ is a trapezium with CF parallel to AB and $CF = 2AB$, find
- the coordinates of F ,
 - an equation of the line BC ,
 - the coordinates of the point where AC cuts the x -axis,
 - an equation of the line through B perpendicular to FC .



تفریح اندیشه ۶

موتورسواری مسیری را می‌پیماید که از چهار قسمت به طولهای مساوی تشکیل شده است.

در اولین قسمت، جاده صاف و هموار است و سرعت او ۱۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد. قسمت دوم تپه‌ای است که سرعتش در این مسیر به ۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. در قسمت سوم که سرانشیبی است سرعت موتورسوار ۳۰ کیلومتر در ساعت است.

در آخرین بخش، جاده صاف و هموار است و باد هم از پشت سر می‌وزد که در نتیجه او به ۱۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. سرعت متوسط این موتورسوار در این مسیر چقدر است؟

جواب در صفحه ۸۸

۵- متوازی‌الاضلاع $OABC$ در ربع اول قرار دارد. زاویه OAC ، 90° است و $OA = 15$. معادله خط مستقیمی که از O و A عبور می‌کند $4y - 3x = 0$ و معادله خط مستقیمی که از O و C عبور می‌کند $3y - 4x = 0$ است. پیدا کنید،

(الف) مختصات A را،

(ب) معادله خطی را که از A و C عبور می‌کند،

(پ) مختصات C را،

(ت) مختصات B را.

۶- نقطه‌های $(6, 13)$ ، $(0, 3)$ و $(5, 0)$ به ترتیب سه رأس A ، B و C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌باشند.

(الف) مختصات D را محاسبه کنید.

(ب) ثابت کنید $ABCD$ یک مستطیل است.

(پ) نسبت طول AB به طول BC را محاسبه کنید.

(ت) نقطه P روی CD واقع است و مساحت مثلث PBC یک چهارم مساحت مستطیل $ABCD$ است. مختصات P و معادله خط BP را بیاید.

۷- نقاط A ، B و C به ترتیب دارای مختصات $(0, 2)$ ، $(1, 4)$ و $(3, -1)$ می‌باشند. فرض کنیم $ABFC$ دوزنقه‌ای است که در آن CF موازی AB و $CF = 2AB$ می‌باشد، پیدا کنید :