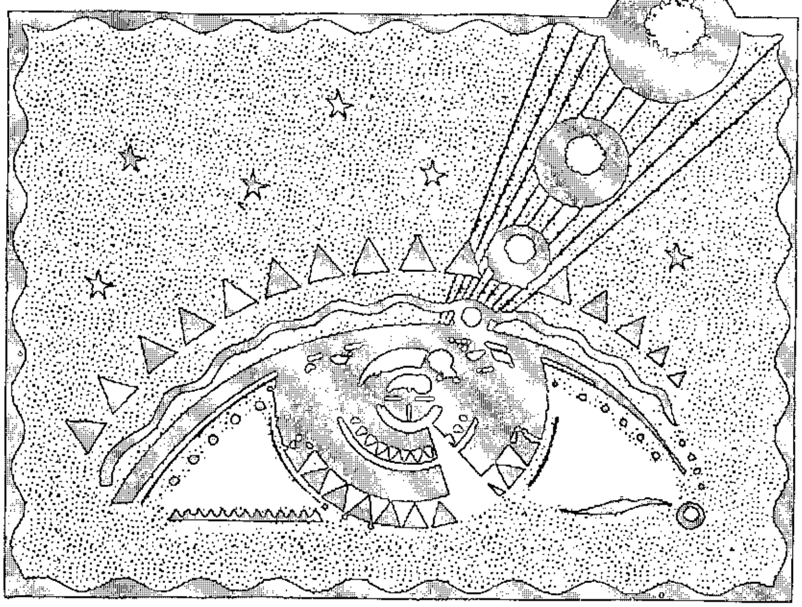


دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

از کتاب:
Mathematical Analysis
نوشتهٔ
K. G. Binmore

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۴)

حمیدرضا امیری

1.10 Quadratic equations

If $y > 0$, the equation $x^2 = y$ has two solutions. We denote the *positive* solution by $\sqrt{y}$. The *negative* solution is therefore $-\sqrt{y}$. We note again that there is no ambiguity about these symbols and that $\pm\sqrt{y}$ simply means '$\sqrt{y}$ or $-\sqrt{y}$'.

The general quadratic equation has the form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

where $a \neq 0$. Multiply through by $4a$. We obtain

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

It follows that the quadratic equation has no real solutions if $b^2 - 4ac < 0$, one real solution if $b^2 - 4ac = 0$ and two real solutions if $b^2 - 4ac > 0$. If $b^2 - 4ac \geqslant 0$,

$$2ax + b = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

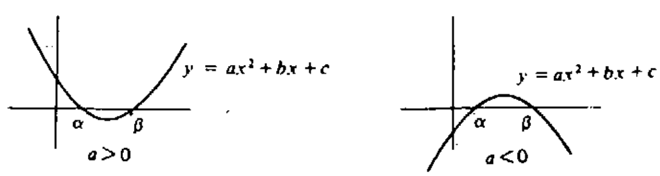
The roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are therefore

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

It is a simple matter to check that, for all values of x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

With the help of this formula, we can sketch the graph of the equation $y = ax^2 + bx + c$.



● معادلات درجهٔ دوم

درصورتی که $y > 0$ معادلهٔ $x^2 = y$ دارای دو جواب است. ما جواب مثبت را با $\sqrt{y}$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب منفی $-\sqrt{y}$ می‌باشد. بعلاوه توجه داریم که هیچ ابهامی راجع به این نمادها وجود ندارد و $\pm\sqrt{y}$ به‌سادگی این مفهوم را می‌رساند که «$\sqrt{y}$ یا $-\sqrt{y}$».

یک معادلهٔ درجه دوم در حالت کلّی به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد که در آن $a \neq 0$. با ضرب طرفین در $4a$ خواهیم داشت:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که معادلهٔ درجه دوم، اگر $b^2 - 4ac < 0$ فاقد جواب حقیقی بوده و اگر $b^2 - 4ac = 0$ یک جواب حقیقی دارد و اگر $b^2 - 4ac > 0$ دارای دو جواب حقیقی می‌باشد. اگر $b^2 - 4ac \geq 0$،

$$2ax + b = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ عبارتند از :

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

و

$$\beta=\frac{-b+\sqrt{(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

این موضوع (مطلب) به‌راحتی قابل بررسی است که، برای هر مقدار x

$$ax^۲+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

به کمک این فرمول، می‌توانیم نمودار معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را رسم کنیم.

1.11 *Example* A nice application of the work on quadratic equations described above is the proof of the important *Cauchy–Schwarz inequality*. This asserts that, if $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are any real numbers, then

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Proof For any x,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2 \\ &= (a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+\ldots+b_n^2) \\ &= Ax^2+2Bx+C. \end{aligned}$$

Since $y=Ax^2+2Bx+C\geqslant 0$ for *all* values of x, it follows that the equation $Ax^2+2Bx+C=0$ cannot have two (distinct) roots. Hence

$$(2B)^2-4AC\leqslant 0$$

i.e. $B^2\leqslant AC$

which is what we had to prove.

مثال: یک کاربرد زیبا از کار روی معادلات درجه دوم که در بالا توصیف شد، اثبات نامساوی مهمی است به‌نام ***نامساوی کوشی ــ شوارتز***. ادعا می‌کنیم که، اگر $a_۱,a_۲,\cdots,a_n$ و $b_۱,b_۲,\cdots,b_n$ اعداد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه :

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n)^۲\le(a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)\times(b_۱^۲+b_۲^۲+\cdots+b_n^۲)$$

اثبات: برای هر x داریم :

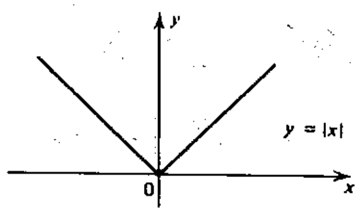
$$\begin{aligned} ۰&\le(a_۱x+b_۱)^۲+(a_۲x+b_۲)^۲+\cdots+(a_nx+b_n)^۲ \\ &=(a_۱^۲+\cdots+a_n^۲)x^۲+۲(a_۱b_۱+\cdots+a_nb_n)x+(b_۱^۲+\cdots+b_n^۲) \\ &=Ax^۲+۲Bx+C \end{aligned}$$

چون برای همهٔ مقادیر x، $y=Ax^۲+۲Bx+C\ge۰$، این نتیجه حاصل می‌شود که معادلهٔ $Ax^۲+۲Bx+c=۰$ نمی‌تواند دو ریشهٔ (متمایز) داشته باشد. بنابراین $(۲B)^۲-۴AC\le۰$ یعنی $B^۲\le AC$ که این (نامساوی) اثبات را برای ما حاصل می‌کند.

1.14 **Modulus**

Suppose that x is a real number. Its *modulus* (or *absolute value*) $|x|$ is defined by

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqslant 0) \\ -x & (x<0). \end{cases}$$



Thus $|3|=3$, $|-6|=6$ and $|0|=0$. Obviously $|x|\geqslant 0$ for all values of x.

It is sometimes useful to note that $|x|=\sqrt{x^2}$.

1.15 *Theorem* For any real number x,

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|.$$

Proof Either $x\geqslant 0$ or $x<0$. In the first case, $-|x|\leqslant 0\leqslant x=|x|$. In the second case, $-|x|=x<0<|x|$.

1.16 *Theorem* For any real numbers a and b

$$|ab|=|a|.|b|$$

Proof The most elegant proof is the following.

$$|ab|=\sqrt{((ab)^2)}=\sqrt{(a^2b^2)}=\sqrt{(a^2)}.\sqrt{(b^2)}=|a|.|b|.$$

● قدر مطلق

فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد. قدر مطلق x ($|x|$)را به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$|x|=\begin{cases} x & (x\ge۰) \\ -x & (x<۰) \end{cases}$$

بنابراین $۳=|۳|$، $۶=|-۶|$ و $۰=|۰|$. بدیهی است که برای هر مقدار x، $|x|\ge۰$.

در بسیاری اوقات مفید است که از تساوی $|x|=\sqrt{x^۲}$ استفاده کنیم.

۱.۱۵ قضیه: برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$-|x|\le x\le|x|$$

اثبات: دو حالت $x\ge۰$ یا $x<۰$ (را درنظر می‌گیریم). در حالت اول، $-|x|\le۰\le x=|x|$. در حالت دوم، $-|x|=x<۰<|x|$.

۱.۱۶ قضیه: برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b،

$$|ab|=|a|.|b|$$

اثبات: زیباترین اثبات در زیر آمده است :

$$|ab|=\sqrt{((ab)^۲)}=\sqrt{(a^۲b^۲)}=\sqrt{a^۲}.\sqrt{b^۲}=|a|.|b|$$