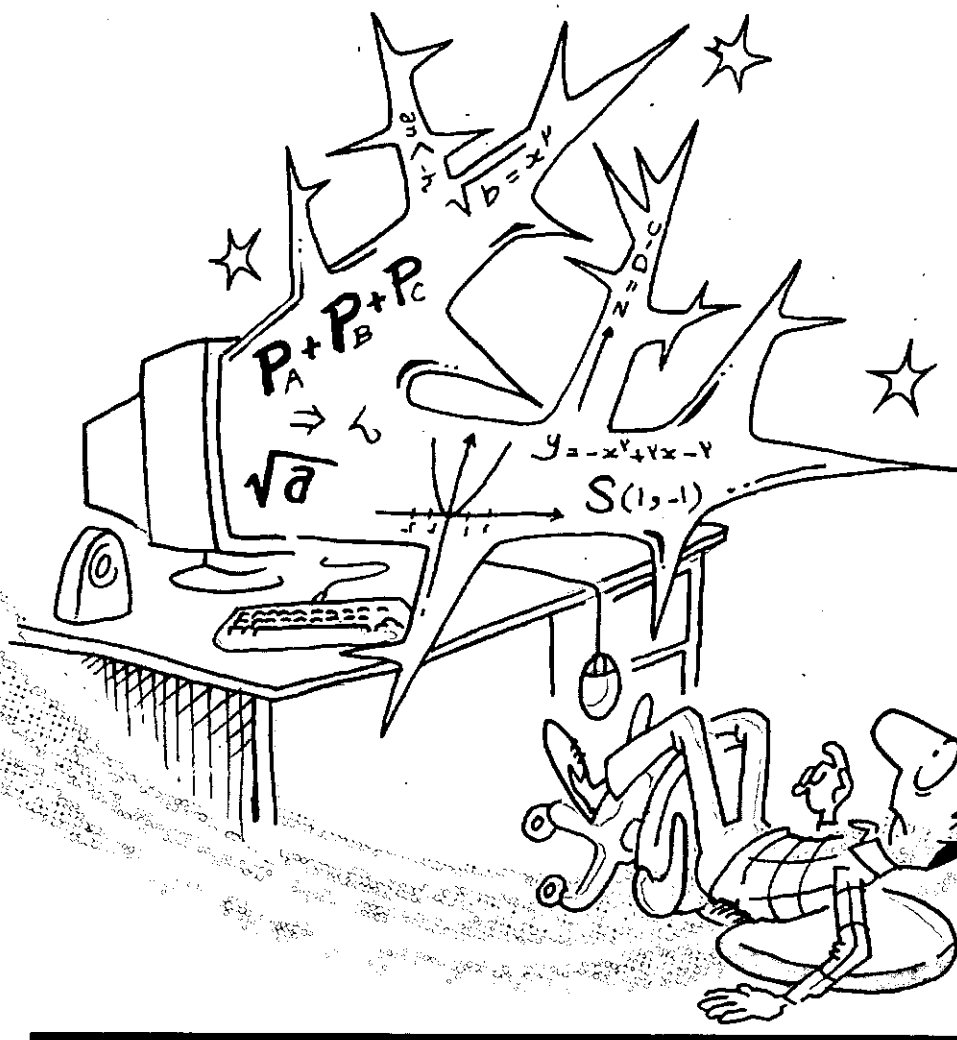
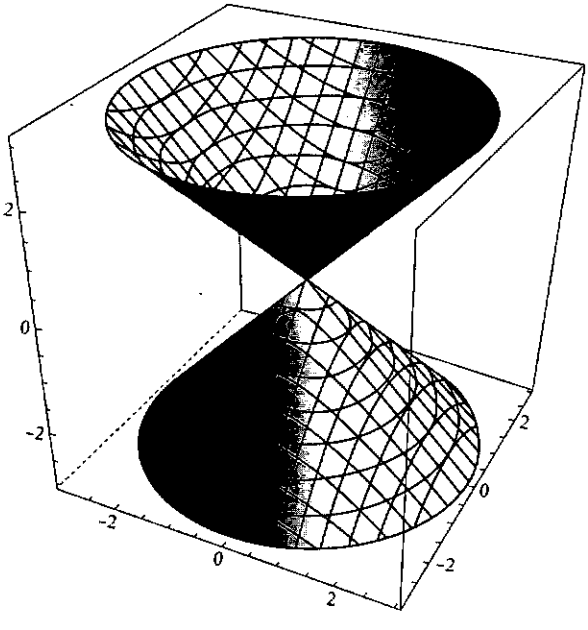


آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا ۳

Mathematica



مقدمه

یکی از مباحث مهم در درس ریاضیات دوره‌ی دبیرستان، موضوع توابع، اعمال روی توابع و رسم نمودار آن‌هاست. بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا این قابلیت را دارد که به‌راحتی محاسبات روی توابع را انجام دهد و منحنی یک تابع در یک بازه‌ی مفروض را رسم کند. در این قسمت چگونگی تعریف یک تابع و تعدادی از دستورالعمل‌های رایج برای رسم یک تابع در محیط بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا با ارائه‌ی مثال‌های مختلف معرفی می‌شوند. باز هم یادآوری می‌کنیم برای اجرای هریک از دستورالعمل‌ها باید دکمه‌های Shift+Enter به‌طور هم‌زمان فشار داده شوند.

معرفی توابع در متمتیکا

فرض کنیم f تابعی برحسب متغیر x باشد. به‌منظور تعریف ضابطه‌ی این تابع در متمتیکا یکی از دو صورت کلی زیر استفاده می‌شود:

f[x_]:=..... یا f[x_]=.....

در طرف دوم تعریفی باید مطرح شود که مطابق آن مقدار تابع f در مقدار مفروض x محاسبه می‌شود. گفتنی است که xیک متغیر ظاهری است و می‌تواند با هر متغیر یا عبارت دیگری جایگزین شود.

مثال ۱: در این مثال دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x^3$ در محیط متمتیکا تعریف و مقادیر f(۳)، g(-۳) و f(۱)+g(-۲) محاسبه شده‌اند. هم‌چنین تابع f با ضابطه‌ی $f(a)=3a^2+2a-5$ تعریف و مقدار f(۲)+f(-۲) به‌دست آمده است.

```
f[x_]:=x^2
f[3]
9
g[x_]:=2x^3
g[-3]
-54
f[1] + g[-2]
-15
f[a_]:=3a^2+2a-5
f[2] + f[-2]
-10
```

مثال ۲: در این مثال ابتدا تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+x^3$ تعریف شده است و به‌دنبال آن f(۲)، f(2x)، $f(e^x)$ و f(λ) مشخص شده‌اند. توجه کنید که ExP[x] به معنای e^x است.

```
f[x_]:=x^2+x^3;
f[2]
12
f[2x]
4x^2+8x^3
f[Exp[x]]
e^2x+e^3x
f[λ]
λ^2+λ^3
```

توابع چندضابطه‌ای نیز در متمتیکا قابل تعریف‌اند. برای این‌کار ضابطه‌ی تابع را به‌همراه شرط مورد نظر به‌صورت زیر منظور می‌کنیم:

f[x_]: = عبارت /; شرط

در این حالت حتماً باید از نماد = : استفاده کرد و پس از معرفی ضابطه‌ی تابع، شرط مورد نظر را بعد از نماد /; قرار دارد.

مثال ۳: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ 8-2x & x>2 \end{cases}$ تعریف شده است:

```
f[x_]:=x^2/;x≤2
f[x_]:=8-2x/;x>2
f[-4]
16
f[4]
0
```

ملاحظه می‌شود که مقدار f(-۴) از ضابطه‌ی اول و مقدار f(۴) از ضابطه‌ی دوم به‌ترتیب ۱۶ و ۰ به‌دست آمده‌اند.

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع مفروض باشند، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم این توابع در محیط متمتیکا قابل انجام است. می‌دانیم این اعمال بین f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ x\in D$

$(f\times g)(x)=f(x).g(x),\ x\in D$

$(f/g)(x)=f(x)/g(x),\ x\in D-\{x|g(x)=0\}$

که در آن‌ها $D=D_f\cap D_g$.

مثال ۴: در زیر چهار عمل اصلی روی توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+2x+3$ محاسبه شده‌اند:

```
f[x_]=√x;
g[x_]=x^2+2x+3;
h1[x_]=f[x]+g[x]
3+√x+2x+x^2
h2[x_]=f[x]-g[x]
-3+√x-2x-x^2
h3[x_]=f[x]-g[x]
√x(3+2x+x^2)
h4[x_]=f[x]/g[x]
√x/(3+2x+x^2)
```

مثال ۵: فرض کنیم $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=3x^2+4x-7$. در این صورت f+g، f-g، f×g و f/g به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند. در این حالت از دستورهای Factor و Simplify نیز استفاده شده است.

```
f[x_]:=x^2-1
g[x_]:=3x^2+4x-7
```

f[x]+g[x]

f[x]-g[x]

Factor[f[x]*g[x]]

Simplify[f[x]/g[x]]

$-۸+۴x+۴x^۲$

$۶-۴x-۲x^۲$

$(-۱+x)^۲(۱+x)(۷+۳x)$

$\frac{۱+x}{۷+۳x}$

هم‌چنین می‌توان ترکیب دو تابع مفروض f و g را نیز در متمتیکا محاسبه کرد. می‌دانیم اگر x عددی در دامنه‌ی g و g(x) مقداری در دامنه‌ی f باشد، آن‌گاه داریم:

$(fog)_{(x)}=f(g(x))$

مثال ۶: در مثال ۴، ترکیب دو تابع f و g به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

h۵[x_]=f[g[x]]

$\sqrt{۳+۲x+x^۲}$

h۶[x_]=g[f[x]]

$۳+۲\sqrt{x}+x$

به‌منظور محاسبه‌ی ترکیب دو تابع f و g می‌توان از دستور Com-position به‌صورت زیر استفاده کرد:

I) Composition[f,g]

II) Composition[g,f]

دستور اول همان fog و دستور دوم همان gof را مشخص می‌کند.

مثال ۷: در دستورالعمل‌های زیر دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+۲x+۳$ تعریف شده و سپس fog و gof با به‌کارگیری دستور Composition به‌دست آمده‌اند.

f[x_]=√x;

g[x_]=x^۲+۲x+۳;

h۱=Composition[f,g];

h۱[x]

$\sqrt{۳+۲x+x^۲}$

h۲=Composition[g,f];

h۲[x]

$۳+۲\sqrt{x}+x$

با استفاده از دستور ترکیب توابع می‌توان ترکیب یک تابع با خودش را به هر تعداد بار که مورد نظر باشد محاسبه کرد. برای این کار از دستورالعمل Nest یا Nest List به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

Nest [f, عبارت , n]

Nest List [f, عبارت , n]

دستور Nest، n بار متوالی تابع f را تحت ضابطه‌ی مشخص‌شده در عبارت داخل کروشه با خودش ترکیب می‌کند. دستور Nest List همین کار را انجام می‌دهد، ولی تمام محاسبات میانی را از ابتدا تا بار nام فهرست می‌کند.

مثال ۸: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$، ۵ بار با خودش ترکیب شده است.

f[x_]:=x^۲;

Nest[f,x,۵]

$x^{۳۲}$

Nest List[f,x,۵]

$\{x,x^۲,x^۴,x^۸,x^{۱۶},x^{۳۲}\}$

مثال ۹: در زیر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x+۱}$ تعریف شده و حاصل fofofofof (یعنی ترکیب f با خودش تا ۵ بار) به‌دست آمده است. با مقدار دهی به x می‌توان مقدار این ترکیب را به‌ازای آن مقدار خاص پیدا کرد.

f[x_]=√(۱+x);

Nest[f,x,۵]

$\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}}}$

رسم نمودار توابع در متمتیکا

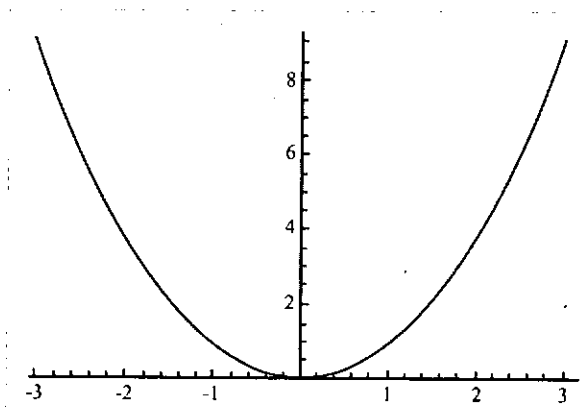
در ادامه، دستورالعمل رسم منحنی یک تابع در محیط متمتیکا معرفی می‌شود. دستور اصلی برای رسم نمودار یک تابع مفروض Plot است که به شکل کلی زیر تعریف می‌شود:

Plot [f[x],{x, x_{min}, x_{max}}]

دستور فوق برای رسم نمودار دو بعدی تابع f در بازه‌ی $x\in[x_{min}, x_{max}]$ به کار می‌رود.

مثال ۱۰: دستور زیر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$ را در $[-۳,۳]$ رسم می‌کند.

Plot [$x^۲$,{x, -۳, ۳}]

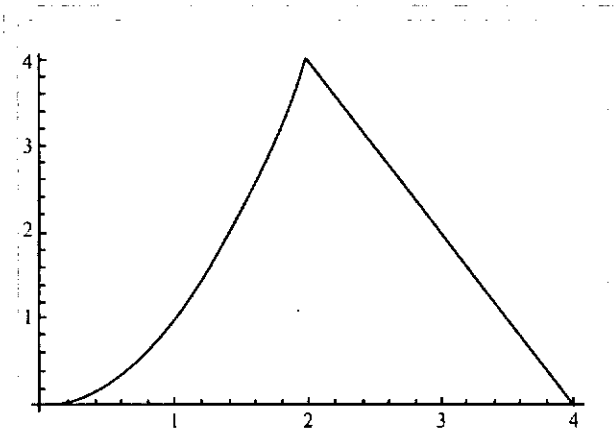


مثال ۱۱: دستور زیر نمودار تابع مثال ۳ را رسم می‌کند:

f[x_]: = x²/ ; x≤۲

f[x_]: = ۸−۲x/ ; x>۲

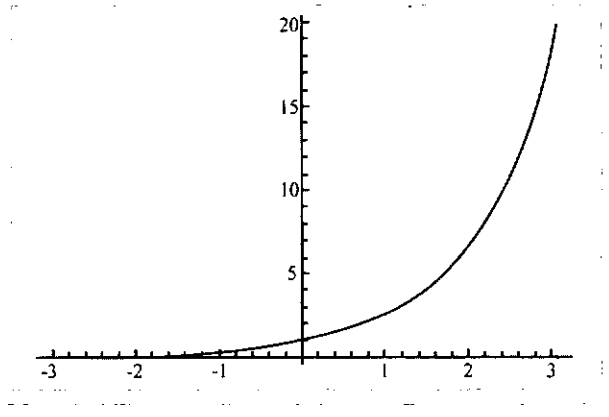
Plot [f[x],{x, ۰, ۴}]



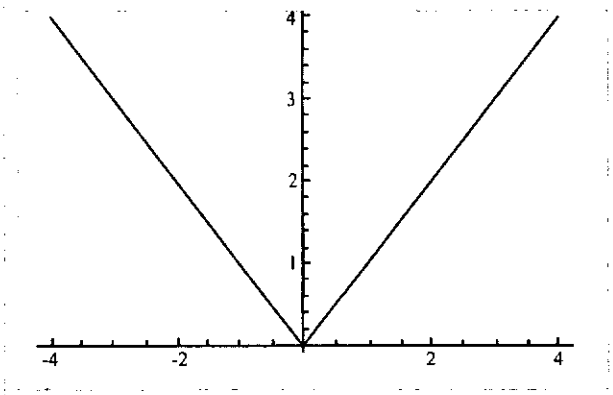
مثال ۱۲: دستورهای زیر نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=e^x$ در بازه‌ی [−۳,۳]، y=|x| در بازه‌ی [−۴,۴] و y=||x|−۱| را در بازه‌ی [−۳,۳] رسم می‌کند. توجه شود که Abs [x] به معنای قدرمطلق x است.

f[x_] = Exp [x];

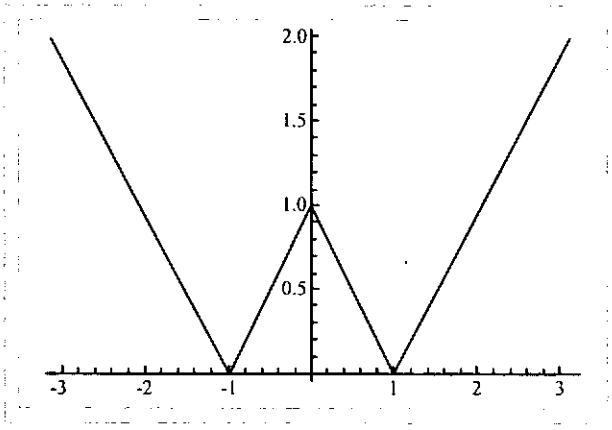
Plot [f[x],{x, −۳, ۳}]



Plot [Abs[x],{x, −۴, ۴}]

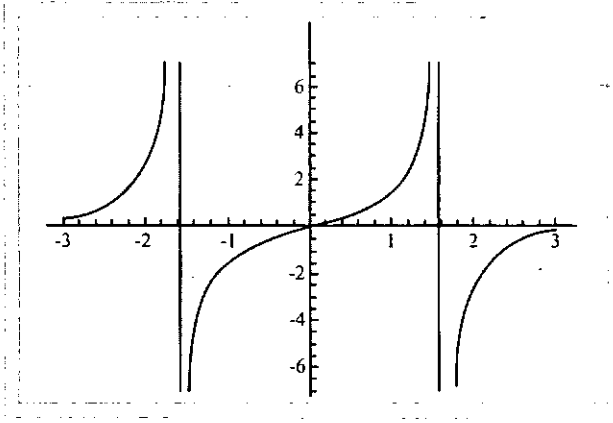


Plot [Abs [Abs[x] −۱],{x, −۳, ۳}]



مثال ۱۳: به منظور رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی y=tanx به ازای ۳≤x≤−۳ دستور زیر را اجرا می‌کنیم:

Plot [Tan[x],{x, −۳, ۳}]



می‌توان نمودار دو تابع را به‌طور هم‌زمان در صفحه‌ی مختصات با رنگ‌های متفاوت رسم کرد. به این منظور از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

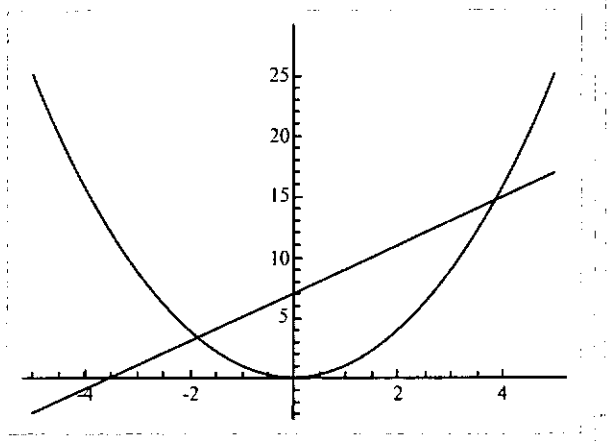
Plot [{f[x], g[x]}, {x, x_{min}, x_{max}}]

این دستور نمودارهای توابع f و g را در محدوده‌ی x_{min} تا x_{max} در یک صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم. این دستور قابل تعمیم برای رسم سه یا بیش از سه تابع به صورت کلی زیر است:

Plot [{$f_۱$, $f_۲$, ...}, {x, x_{min}, x_{max}}]

مثال ۱۴: به منظور رسم هم‌زمان نمودارهای دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^۲$ و g(x)=۲x+۷ در [−۵,۵] به صورت زیر عمل می‌کنیم:

Plot [{x^2, 2x+7},{x, −5, 5}]



به‌منظور رسم هم‌زمان نمودار چند تابع در یک صفحه‌ی مختصات از دستور Show نیز می‌توان استفاده کرد. در این حالت چون دامنه‌های توابع متفاوت‌اند، با به‌کارگیری یکی از موارد زیر، کاربر می‌تواند تنظیمات موردنظر برای رسم این نمودارها را تغییر دهد. برای تایپ کاراکترهایی چون → می‌توانیم روی گزینه‌ی Insert کلیک و پس از انتخاب special character گزینه‌ی → را در صفحه درج کنیم یا این کاراکتر را از پنجره‌ی Basic Math Input برگزینیم.

۱) PlotRange → Automatic

۲) PlotRange → All

۳) PlotRange → $\{y_{min}, y_{max}\}$

۴) PlotRange → $\{\{x_{mix}, x_{max}\}, \{y_{min}, y_{max}\}\}$

با در نظر گرفتن دستور انتخابی ۱، خود متمتیکا به صورت خودکار تنظیمات مبنایی را برای رسم توابع برمی‌گزیند و آن دسته از نقاطی را که مختص عمودی آن‌ها خیلی بزرگ باشد، در نمودارها حذف می‌کند. دستور ۲ متمتیکا را وادار می‌کند که تمام نقاط نمودارها را در محدوده‌های وارد شده رسم کند. دستور ۳ تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص عمودی آن‌ها در محدوده‌ی بین y_{min} و y_{max} باشد. دستور ۴ نیز تنها نقاطی از نمودارها را رسم می‌کند که مختص افقی آن‌ها بین x_{min} و x_{max} و مختص عمودی آن‌ها بین y_{min} و y_{max} باشند. به این ترتیب از دستور Show به شکل کلی زیر برای رسم هم‌زمان چند تابع می‌توان استفاده کرد.

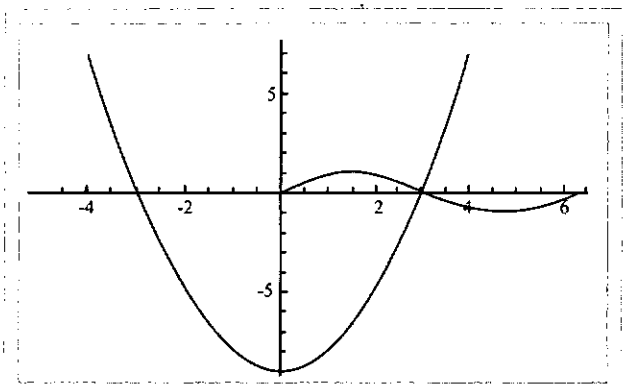
Show [g_1, g_2, ..., PlotRange → ...]

مثال ۱۵: در مثال ذیل، دو تابع با ضابطه‌های $y=x^2-9$ و y=sinx رسم شده‌اند. با استفاده از دستور Show به دو صورت زیر آن‌ها را در یک صفحه‌ی مختصات با به‌کارگیری PlotRange رسم می‌کنیم.

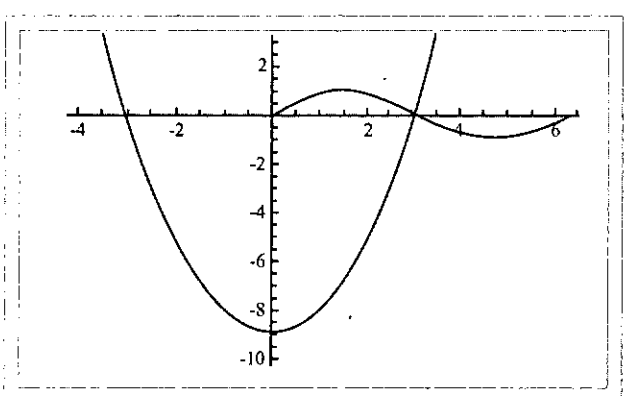
g_1= Plot[x^2 −۹, {x, −۴, ۴}];

g_2= Plot[sin[x], {x, ۰, ۲π}];

Show [g_1, g_2, PlotRange → All]



Show [g_1, g_2, PlotRange → {−۱۰, ۳}]

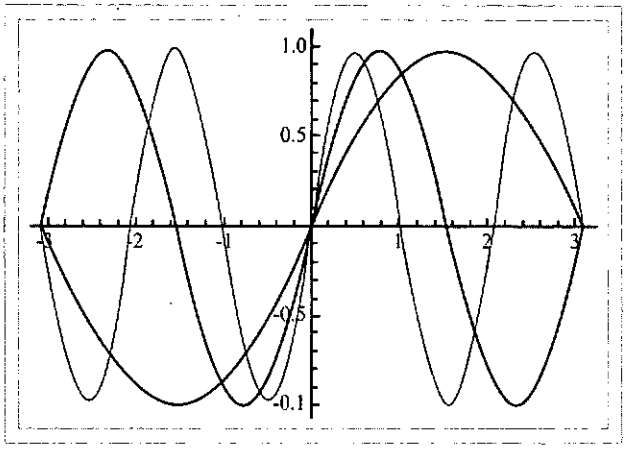


زمانی‌که چند نمودار به‌طور هم‌زمان رسم می‌شوند، متمتیکا این قابلیت را دارد که برای تشخیص نمودارها آن‌ها را با رنگ‌ها و اندازه‌های مختلف یا با برچسب‌گذاری و به‌کارگیری خط‌چین‌های گوناگون رسم کند. برای مثال می‌توان با به‌کارگیری دستور PlotStyle نوع ترسیم موردنظر را اعلام کرد. یکی از انواع رایج GrayLevel[x] است که در آن x عددی بین صفر و یک است. هر قدر x به یک نزدیک‌تر باشد شکل پررنگ‌تر و هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشد کم‌رنگ‌تر رسم می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۶: دستور زیر سه منحنی y=sinx، y=sin۲x و y=sin۳x را به ازای $-\pi \le x \le \pi$ با سه سطح رنگ مختلف رسم می‌کند.

Plot [{sin[x], sin [2x], sin [3x]}, {x, −Pi, Pi}]

PlotStyle → {GrayLevel [۰/۲], GrayLevel [۰/۵], GrayLevel [۰/۸]}]

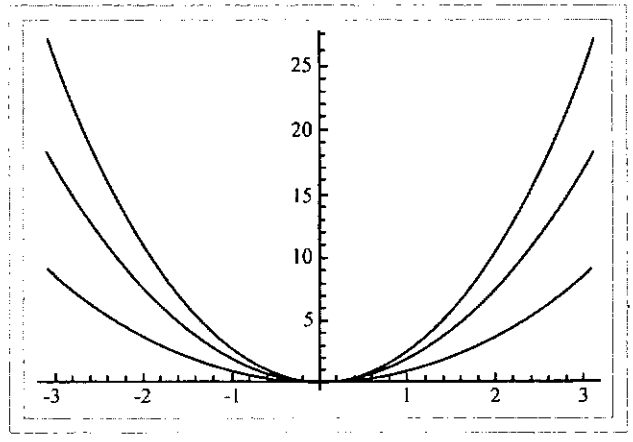


همچنین می‌توان نام رنگ انتخابی برای رسم هر یک از نمودارها را اعلام کرد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۷: دستور زیر منحنی توابع $y=x^2$، $y=2x^2$ و $y=3x^2$ را به ازای $-3 \leq x \leq 3$، به ترتیب با نوع ترسیم قرمز، سبز و آبی رسم می‌کند. شما در مانیتور رایانه‌ی خود می‌توانید نمودارها را با این رنگ‌ها مشاهده کنید. البته رنگ‌های دیگری چون Pink، Gray، Brown، Yellow و... را نیز می‌توان انتخاب کرد. دوباره متذکر می‌شویم که حرف اول نام هر یک از دستورالعمل‌ها و انتخاب‌ها در متمتیکا باید بزرگ و سایر حروف باید کوچک تایپ شوند. البته این قانون برای دستورالعمل‌های دو کلمه‌ای نیز باید رعایت شود. برای مثال در واژه‌ی PlotStyle باید حروف P و S بزرگ و سایر حروف کوچک تایپ شوند. یا برای مثال اگر بخواهیم رنگ یک منحنی قرمز کم‌رنگ باشد باید تایپ کنیم: Light Red

برای انتخاب ساده‌ی رنگ‌ها در صفحه‌ی اصلی متمتیکا روی Insert کلیک و گزینه‌ی Color را انتخاب می‌کنیم، سپس در صفحه‌ی رنگ‌ها رنگ موردنظر را برمی‌گزینیم.

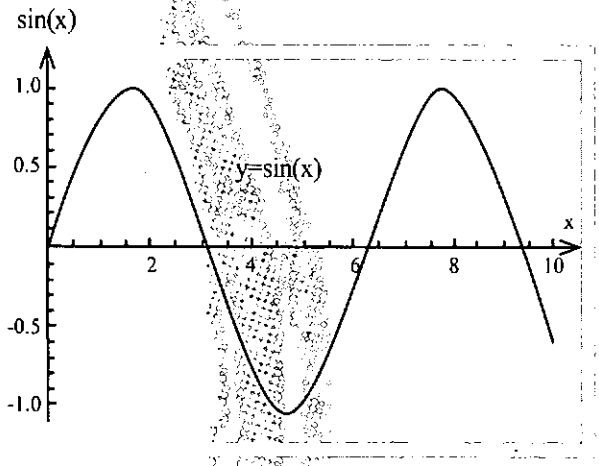
```
Plot [{x^2, 2x^2, 3x^2}, {x, -3, 3}, PlotStyle → {Red, Green, Blue}]
```



* گفتنی است که اگر نوع رنگ‌ها مشخص نشود، خود نرم‌افزار به شکل خودکار رنگ‌های مختلفی را انتخاب می‌کند. هم‌چنین می‌توان با برچسب‌گذاری روی نمودار تابع یا محورهای مختصات، اطلاعات موردنظر را روی شکل منظور کرد. برای این کار از دستور PlotLabel برای برچسب‌گذاری نمودار تابع و AxesLabel برای برچسب‌گذاری محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۸: در دستور زیر منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=\sin x$ در بازه‌ی $[0, 10]$ با برچسب $y=\sin(x)$ برای منحنی تابع و برچسب‌های x و $\sin(x)$ برای محورهای مختصات رسم شده‌اند.

```
Plot [sin[x], {x, 0, 10}, PlotLabel → y==sin[x], AxesLabel → {x, sin [x]}]
```



در قسمت بعد دستورالعمل‌های دیگری از بسته‌ی نرم‌افزاری متمتیکا معرفی خواهند شد.

منابع

1. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline series, second edition, McGraw Hill Companies, 2009.

2. Wolfram Mathematica 6, Guidebook, 2007.