



آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا (۲)

ریاضی روی عبارات‌های جبری، ساده‌کردن عبارات‌ها و تجزیه‌کردن آن‌ها به حاصل‌ضرب عوامل اول و هم‌چنین اتحادهای جبری آشنا می‌شوند. این‌گونه عملیات که به صورت دستی انجام می‌شوند و در اکثر موارد نیاز به ابتکار عمل و تفکر زیادی دارند، در بسته‌ی نرم‌افزاری مَتَمَتیکا به سادگی انجام می‌گیرد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های اصلی در این بسته‌ی نرم‌افزاری که مربوط به محاسبات روی عبارات‌های جبری است، می‌پردازیم. مجدداً توصیه می‌شود خوانندگان گرامی هم‌زمان با مطالعه‌ی این سری از مقالات دستورالعمل‌های معرفی شده را روی رایانه‌ی خود در

Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلید واژه‌ها: دستورالعمل‌های Factor, Expand, Simplify
List, Solve, Roots, Coefficient

مقدمه

در کتاب ریاضیات ۱، سال اول متوسطه دانش‌آموزان با اعمال

Expand[(1+√x)^6]

$$1+6\sqrt{x}+15x+20x^{3/2}+15x^2+6x^{5/2}+x^3$$

توجه شود که علامت «^» به معنای توان‌رسانی است و (a+b)^6 همان (a+b)^۶ است.

۴. دستور [عبارت] Factor، عبارت داخل کرشه را به شکل حاصل ضربی از عوامل اول تجزیه می‌کند. در این حالت اگر عبارت داخل کرشه تجزیه‌ناپذیر باشد، خود عبارت در خروجی مشخص می‌شود.
مثال:

Factor[x^5-y^5]

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

Factor[Power[a,4]+Power[b,4]]

$$a^4+b^4$$

Factor[2x^6-8y^10]

$$2(x^3-2y^5)(x^3+2y^5)$$

Factor[x^2+xy-6y^2+x+13y-6]

$$-6+x+x^2+xy+13y-6y^2$$

۵. دستور [جمله، عبارت] Coefficient ضریب جمله‌ی بیان‌شده‌ی داخل کرشه را در عبارت مفروض مشخص می‌کند. هم‌چنین دستور [n، جمله، عبارت] Coefficient ضریب «جمله» را در عبارت داخل کرشه مشخص می‌کند.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم ضریب x^2y^2 را در عبارت $(2x+3y)^6$ بدانیم. برای این کار از دستور فوق به صورت زیر استفاده می‌کنیم و با اجرای آن ضریب این جمله را به دست می‌آوریم:

Coefficient[(2x+3y)^6,x^2y^2]

$$4860$$

حال فرض کنید می‌خواهیم ضریب جمله‌ی a^2 را در عبارت $(a-2)^{10}$ بدانیم. در این حالت به صورت زیر از دستور فوق استفاده می‌کنیم:

Coefficient[(a-2)^10,a,3]

$$-15360$$

با استفاده از این دستور می‌توانید هر یک از ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتن به صورت کلی $(a+b)^n$ را به دست آورید. مجدداً یادآوری می‌شود برای به‌کارگیری عمل توان‌رسانی هم می‌توانید از پنجره‌ی Basic Math Input و نماد \blacksquare استفاده کنید و هم

محیط ممتیکا اجرا کنند تا بهتر با عملکرد این دستورها آشنا شوند. بیش‌تر مسائل داخل کتاب درسی را می‌توانید به عنوان تمرین به‌کارگیری این دستورها عمل‌ها حل کنید و پاسخ نهایی را در اختیار داشته باشید.

در قسمت قبلی شما را با چند عمل مقدماتی و هم‌چنین محیط بسته‌ی نرم‌افزاری ممتیکا آشنا کردیم. در پنجره Basic Math Input که در صفحه‌ی اصلی ممتیکا قابل نمایش است، نمادهای بسیاری از اعمال مهم ریاضی از جمله توان‌رسانی، ریشه‌گیری، کسر و... مشخص شده‌اند. نمادهای دیگر این پنجره در قسمت‌های بعدی معرفی خواهند شد. یادآوری می‌شود که برای محاسبه‌ی هر سلول به‌طور هم‌زمان، باید دکمه‌های shift+Enter را فشار دهیم.

ابتدا چند دستورالعمل مقدماتی را معرفی می‌کنیم.

۱. دستور [عبارت] Simplify عبارت داخل کرشه را به ساده‌ترین صورت ممکن ساده می‌کند.
مثال:

$$\text{Simplify}\left[\frac{1}{3(1+x)} - \frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)} + \frac{2}{3\left(1+\frac{1}{3}(-1+2x)^2\right)}\right]$$

$$\frac{1}{1+x^3}$$
$$\text{Simplify}[x^4+4x^3y-15y^3x-6x^3y+4xy^3+7x^4]$$
$$8x^4+4xy^3-2x^3y-15xy^3$$

۲. دستور [فرض، عبارت] Simplify تحت فرض داده شده در داخل کرشه، عبارت موردنظر را ساده می‌کند.
مثال:

Simplify[Sqrt[x^2], x > 0]

$$x$$

Simplify[Sqrt[x^2], x < 0]

$$-x$$

۳. دستور [عبارت] Expand حاصل عبارت داخل کرشه را گسترش می‌دهد.
مثال:

Expand[(a+b)^6]

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Expand[(1+x+y)(2-x)^3]

$$8-4x-6x^2+5x^3-x^4+8y-12xy+6x^2y-x^3y$$

$$\text{Together} \left[\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right]$$

$$\frac{8 + 5x}{x(1+x)(2+x)}$$

۹. دستور [عبارت] Apart، عبارت داخل کروشه را به شکل مجموعی از کسرهای جزئی تجزیه می‌کند.

$$\text{Apart} \left[\frac{1}{((1+x)(5+x))} \right]$$

$$\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(5+x)}$$

$$\text{Apart} \left[\frac{x}{x^3 - 1} \right]$$

$$\frac{1}{3(-1+x)} + \frac{1-x}{3(1+x+x^2)}$$

۱۰. دستور [عبارت] Cancel عوامل مشترک در صورت و مخرج عبارت داخل کروشه را حذف می‌کند.

$$\text{Cancel} \left[\frac{x^2 - 5x + 6}{5x - 10} \right]$$

$$\frac{1}{5}(-3+x)$$

البته از دستور Simplify نیز می‌توان استفاده کرد.

$$\text{Cancel} \left[\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x + 2} \right]$$

$$\frac{3+x}{1+x}$$

در ادامه، چند دستورالعمل تکمیلی دیگر را معرفی می‌کنیم: به منظور ورود یک عبارت برای استفاده از هر کدام از دستورالعمل‌های فوق به جای تایپ عبارت در داخل کروشه، می‌توان نامی برای عبارت در نظر گرفت و سپس با استفاده از این نام در داخل کروشه به جای کل عبارت فقط نام آن را تایپ کرد. در این حالت، باید بعد از تایپ عبارت علامت ؛ را تایپ کرد.

$$p = x^8 - 41x^4 + 400;$$

Factor[p]

$$(-2+x)(2+x)(-5+x^2)(4+x^2)(5+x^2)$$

در مثال زیر یک چندجمله‌ای با دو متغیر به نام poly معرفی شده و با استفاده از دستور Collect یک بار نسبت به متغیر x و یک بار نسبت به متغیر y دسته‌بندی شده است.

$$\text{poly} = 1 + 2x + 2y + 2xy + 5x^2y + 6xy^2 + 7x^2y^2;$$

Collect[poly, x]

$$1 + 3y + x(2 + 4y + 6y^2) + x^2(5y + 7y^2)$$

می‌توانید از نماد «^» یا دستورالعمل Power که قبلاً معرفی شد، بهره‌گیری کنید.

۶. دستور [جمله، عبارت] Exponent توان جمله‌ی مذکور در داخل کروشه را در عبارت مفروض بیان می‌کند.

$$\text{Exponent}[(1+x^2)^3 - (y+x^2+ax^3)^2, x]$$

$$\text{Exponent}[6a^3 - 24ab^2 - 4a^2b + 5b^3, ab^2]$$

۷. دستور [متغیر و عبارت] Collect

جملاتی را که در عبارت داده شده دارای توان یکسانی نسبت به متغیر مفروض هستند، دسته‌بندی می‌کند.

$$\text{Collect}[ax + by + cx, x]$$

$$(a+c)x + by$$

$$\text{Collect}[(1+a+x)^4, x]$$

$$1 + 4a + 6a^2 + 4a^3 + a^4 + (4 + 12a + 12a^2 + 4a^3)x$$

$$+ (6 + 12a + 6a^2)x^2 + (4 + 4a)x^3 + x^4$$

۸. دستور [عبارت] Together عبارت داخل کروشه را به شکل

یک کسر نمایش می‌دهد.

$$\text{Together} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right]$$

$$\frac{1}{-1+x}$$

مثال: برای نمایش عبارت $\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1}$ به شکل یک کسر به صورت زیر از این دستور استفاده می‌شود. این دستور نتیجه را به صورت یک کسر ساده شده اعلام می‌کند. توجه کنید که می‌توان برای ورود کسرها هم از نماد / و هم از نماد $\frac{\square}{\square}$ در پنجره‌ی Basic Math Input استفاده کرد.

$$\text{Together}[x^2/(x^2-1) + x/(x^2-1)]$$

$$\frac{x}{-1+x}$$

هم‌چنین به مثال‌های زیر نیز توجه کنید:

$$\text{Together} \left[\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 25} \times \frac{5x + 10}{x^2 - 2x} \right]$$

$$\frac{5x(2+x)}{-25+x^2}$$

۱۳. دستور [متغیر و معادله] Roots ریشه‌های معادله‌ی مفروض را نسبت به متغیر مربوط مشخص می‌کند. در این حالت باید هنگام ورود معادله از دو تساوی متوالی استفاده کرد. برای مثال:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

در خروجی، کلیه ریشه‌های معادله برای متغیر x مشخص و بین ریشه‌ها علامت \parallel درج می‌شود.
مثال:

$$\text{Roots}[x^2 + x - 1 = 0, x]$$

$$x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) \parallel x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

$$\text{Roots}[x^3 - x^2 - x + 1 = 0, x]$$

$$x = -1 \parallel x = 1 \parallel x = 1$$

$$\text{Roots}[(x^2 - 5)(x + 2)^3 = 0, x]$$

$$x = -2 \parallel x = -2 \parallel x = -2 \parallel x = \sqrt{5} \parallel x = -\sqrt{5}$$

$$\text{Roots}[x^4 + x^3 - 8x^2 - 5x + 15 = 0, x]$$

$$x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}) \parallel x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}) \parallel x = \sqrt{5} \parallel x = -\sqrt{5}$$

۱۴. دستور [متغیر، معادله] Solve، معادله‌ی داخل کروشه را نسبت به متغیر مفروض حل می‌کند. اگر معادله برحسب x و حاصل a باشد، خروجی به صورت $\{x \rightarrow a\}$ مشخص می‌شود. توجه شود مشابه دستور قبلی باید برای ورود معادله به جای $=$ از $==$ استفاده کرد. اگر معادله فقط دارای یک متغیر باشد نیازی به معرفی متغیر نیست، ولی اگر در معادله بیش از یک متغیر وجود داشته باشد، لازم است که نام متغیر مشخص شود.

$$\text{Solve}[4x + 5 = -6x + 7]$$

$$\{x \rightarrow \frac{1}{5}\}$$

$$\text{Solve}[2xy = 3a + y, a]$$

$$\{a \rightarrow \frac{1}{3}(2xy - y)\}$$

از دستور Solve برای حل دستگاه معادلات هم می‌توان استفاده کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال: می‌خواهیم دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ را حل کنیم. برای این کار معادلات را داخل کروشه تایپ و بین آن‌ها علامت $\&\&$ را قرار می‌دهیم. پس از اجرا، جواب‌های دستگاه مشخص می‌شوند.

$$\text{Solve}[2x - 3y = 4 \&\& -x + y = 5]$$

$$\{x \rightarrow -19, y \rightarrow -14\}$$

مثال: می‌خواهیم دستگاه سه معادله سه مجهولی ذیل را حل کنیم:

Collect[poly, y]

$$1 + 2x + (3 + 4x + 5x^2)y + (6x + 7x^2)y^2$$

۱۱. دستورالعمل‌های Polynomial GCD [P1, P2, ...] و Polynomial LCM [P1, P2, ...] به ترتیب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارات‌های داخل کروشه را مشخص می‌کنند. توجه شود هنگام استفاده از این دستورها حروفی که به صورت بزرگ در دستور آمده‌اند به همین شکل تایپ شوند.
مثال:

$$\text{PolynomialGCD}[x^2 - 1, x^3 - 1, x^2 + x - 2]$$

$$-1 + x$$

در مثال زیر، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $(x-y)^2(x+y)$ و $(x^2-y^2)^2(x+y)$ به دست آمده‌اند.

$$\text{PolynomialGCD}[(x-y)^3(x+y), (x^2-y^2)^2(3x^2+2)]$$

$$(-x+y)^2(x+y)$$

$$\text{PolynomialLCM}[(x-y)^3(x+y), (x^2-y^2)^2(3x^2+2)]$$

$$3x^2(x-y)^3(x+y)^2$$

در دو مثال زیر ابتدا دو چندجمله‌ای p و q معرفی و سپس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها با به‌کارگیری دو دستور فوق محاسبه شده‌اند.

$$p = 2x^4 - 15x^3 + 39x^2 - 40x + 12;$$

$$q = 4x^4 - 24x^3 + 45x^2 - 29x + 6;$$

$$a = \text{PolynomialGCD}[p, q]$$

$$-6 + 17x - 11x^2 + 2x^3$$

$$b = \text{PolynomialLCM}[p, q]$$

$$(-2+x)(6-29x+45x^2-24x^3+4x^4)$$

$$p = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3;$$

$$q = (x-1)^2(x-2)(x-3)^4;$$

$$\text{PolynomialGCD}[p, q]$$

$$(-3+x)^3(-2+x)(-1+x)$$

$$\text{PolynomialLCM}[p, q]$$

$$(-3+x)^4(-2+x)^2(-1+x)^2$$

۱۲. دستور [متغیر و عبارت] CoefficientList فهرستی از تمام ضرایب توان‌های متغیر مفروض را در عبارت داخل کروشه مشخص می‌کند.
مثال:

$$\text{CoefficientList}[(x+1)^{10}, x]$$

$$\{1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1\}$$

List²

{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

$\sqrt{\text{List}}$

{1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$ }

List1 = {1, 2, 3, 4, 5};

List2 = {2, 3, 2, 3, 2};

List1 + List2

{3, 5, 5, 7, 7}

در قسمت بعد به معرفی توابع اصلی در ممتیکا و رسم نمودار

توابع می پردازیم.

تمرین

پاسخ تمرینات زیر را در محیط بسته نرم افزاری ممتیکا به

دست آورید:

۱. سه عبارت $r = \frac{x^2}{x^2+1}$ و $q = \frac{yx-2}{2x+1}$ ، $p = \frac{2x+3}{5x-7}$

را با هم جمع و نتیجه را در یک کسر بیان کنید.

۲. حاصل $(x+y+z)^2$ را به دست آورید.

۳. بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک ترین مضرب مشترک

عبارت های زیر را به دست آورید:

$a^2 - b^2$, $(a-b)^2$, $(a^2 - b^2)(a+b)$

۴. ریشه های معادله $x^5 - 4x^2 + x^2 - 4 = 0$ را بیابید.

هم چنین عبارت $p = x^5 - 4x^2 + x^2 - 4$ را به صورت حاصل ضرب عوامل اول بنویسید.

۵. فهرست $\text{List} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مفروض است حاصل

$\text{List}^2 + 2\text{List}$ را به دست آورید.

۶. مقدار تقریبی عدد پی را تا ۱۵ رقم اعشار بیابید.

پی نوشت

1. Mathematica

منابع

۱. کتاب درسی ریاضیات ۱ سال اول متوسطه. ۱۳۸۹

2. Mathematica, second edition, Eugene Don, ph.D., Schaum's Outline Series, McGrawHill, 2009

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 4y - 3z = -1 \\ 7x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور Solve، درون کروشه هر سه معادله را تایپ و بین آن ها علامت && را قرار می دهیم. پس از اجرا جواب های دستگاه به دست می آیند:

Solve[2x+y-z==3&& x+4y-3z==-1&& 7x-2y-z==0]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{33}{10}, y \rightarrow \frac{13}{2}, z \rightarrow \frac{101}{10} \right\} \right\}$$

۱۵. دستور العمل های $\text{PolynomialQuotient}[P,S,x]$ و $\text{PolynomialRemainder}[P,S,x]$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای P را بر چند جمله ای S نسبت به متغیر x مشخص می کنند.

مثال: می خواهیم خارج قسمت و باقی مانده ی تقسیم $P = x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 5x + 9$ را بر $S = x^2 + 1$ به دست آوریم. با تایپ کردن این دو چند جمله ای و به کارگیری دو دستور فوق، نتیجه به صورت زیر حاصل می شود. توجه کنید که باید بعد از معرفی هر چند جمله ای نماد ; را تایپ کنید.

$p = x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 5x + 9;$

$s = x^2 + 1;$

$q = \text{PolynomialQuotient}[p,s,x]$

$10 - x - 7x^2 + x^3$

$r = \text{PolynomialRemainder}[p,s,x]$

$-1 - 4x$

۱۶. دستور [عناصر] List فهرستی از اشیا را نمایش می دهد که می توان شامل اعداد یا حروف باشد. مزیت این دستور آن است که هر نوع عمل ریاضی را به راحتی می توان روی آن انجام داد. برای مثال، دستور $\frac{1}{\text{List}}$ تمام عناصر موجود در داخل کروشه را معکوس می کند یا دستور $\sqrt{\text{List}}$ جذر تمام عناصر موجود در List را می گیرد. هم چنین می توان بین دو فهرست یک عمل حسابی چون جمع را نیز انجام داد. در این حالت عناصر دو فهرست نظیر به نظیر با هم جمع می شوند.

مثال:

List = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

1 / List

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10} \right\}$$