تاریخ ریاضیات دورهٔ باستان را چگونه باید بررسی کرد؟*

آرپاد سابو

در حدود دو دههٔ قبل تحقیقاتی را شروع کردم که امیدوارم به‌روشنتر شدن چند مسألهٔ تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات کمك کرده باشد. در این مقاله چندان برآن نیستم که نتایج این تحقیقات را مشخص کنم، بلکه بیشتر برآنم که به مسائل وروشهای دنبال شده در این تحقیقات بپردازم.

ولی نخست می‌خواهم به‌رده‌بندی معروفی درمورد علوم، که‌مرا به‌یکی از مهمترین مسائلم هدایت کرد، اشاره کنم. شاخه‌های گوناگون تحقیقات‌علمی رامی‌توان به‌دو گروه مهم‌تقسیم کرد: علوم تجربی و علوم غیرتجربی. گروه‌اول به‌بررسی، توصیف، توضیح وپیش‌بینی رویدادهای جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، می‌پردازد. احکام این علوم با واقعیتهای تجربهٔ ما مقایله می‌شوند، و تنها درصورتی قابل قبول‌هستند که درست بر شواهد تجربی استوار باشند؛ و خود علوم تجربی هم به‌طورکلی به‌علوم طبیعی و علوم اجتماعی تقسیم می‌شوند. (به‌اعتقاد من علوم رفتاری هم روی‌هم‌رفته جزو علوم اجتماعی به شمار می‌آیند، حتی‌اگر ازبرخی تأثیرات بسیارمهم علوم طبیعی برکنارنمانده باشند. ولی مسألهٔ من فعلاً این نیست.) به هر ترتیب، آنچه علوم تجربی را ازشاخه‌های غیرتجربی، یعنی‌منطق وریاضیات محض، متمایز می‌سازد وابستگی به شواهد تجربی است. زیرا گزاره‌های منطق و قضایای ریاضی بدون‌هیچ‌گونه‌ارجاع‌اساسی به‌یافته‌های‌تجربی‌اثبات‌می‌شوند. البته این تمایز را به‌صورت دیگری هم می‌توان بیان کرد، یعنی به‌این زبان‌که روش همهٔ‌علوم تجربی، استقرایی است، درحالی‌که روش هر دوشاخهٔ‌غیرتجربی، یعنی منطق و ریاضیات، قیاسی است. و تاآنجاکه این امربا‌ریاضیات‌ارتباط‌می‌یابد، این حکم‌آخر را می‌توانیم به‌کمك نکتهٔ ساده‌ای تکمیل کنیم که در سالهای اخیر به خصوص از سوی ریاضیدان معروفی چون پولیا مورد تأکید قرارگرفته است. او به ما یادآوری می‌کندکه

> ریاضیات دو جنبه دارد، از یك سو علم دقیق اقلیدسی است، ولی از سوی دیگر، چیزدیگری هم هست. ریاضیاتی که به‌سبك‌اقلیدسی ارائه می‌شود به‌صورت علمی قیاسی و منظم به‌نظر می‌آید، ولی ریاضیات درحال پیدایش به صورت علمی استقرایی، آزمایشی، و تجربی به‌نظر می‌آید.

درحقیقت، بیشتراحکام ریاضی درابتدا صرفاًحدسها و گمان‌پردازیهایی بر مبنای تجارب عینی بوده‌اند، و مدتها بعد به قضایایی واقعی تبدیل شده‌اند، یعنی‌وقتی که ریاضیدانان‌سرانجام‌موفق به‌اثبات آنها‌می‌شدند، به‌این معنی که‌آنها را از اصول ریاضی معینی استنتاج می‌کردند.

پرسشی که‌اکنون مطرح می‌شود پرسشی دوگانه‌است: ازیك‌سو پرسشی فلسفی است و ازسوی دیگر پرسشی تاریخی است (۱) فلاسفه باید این پرسش را پاسخ گویند که چرا ما برای یقین قیاسی، یعنی، یقینی که‌درمورد‌گزاره‌های ثابت‌شدهٔ ریاضی‌بازدهمگان است، ارج بیشتری قائل هستیم تا برای به اصطلاح عدم یقین استقرایی علوم تجربی؟ منظورم از عدم یقین این است:

> یك فرضیهٔ تجربی هر اندازه هم‌که مورد آزمون واقع شده باشد، وهر اندازه هم‌که توسط یافته‌های تجربی مورد تأیید قرارگرفته باشد، باز ممکن است در موارد بررسی نشده مردود شود. شواهد تجربی‌هیچگاه به‌تنهایی برای تصدیق یك‌فرضیه کفایت نمی‌کنند؛ به‌عبارت‌دیگر، هرگز نمی‌توانند صدق فرضیه را با یقین قیاسی تعیین‌کنند، بلکه تنها می‌توانند پشتیبان استقرایی کم و بیش‌قوی برای فرضیه به‌شمارآیند (همپل).

بدون شك، ارجی که ما برای «یقین قیاسی» قائل هستیم سبب می‌شود که ریاضیدانان همیشه تلاش کنند تا حدسها، وگمان‌پردازیهای صرف خود را به‌قضایای اثبات شدهٔ واقعی تبدیل کنند. ولی فکر می‌کنم که شاید احترام فوق‌العاده به «یقین قیاسی» تا اندازه‌ای مبالغه آمیز باشد. زیرا تا آنجا که اطلاع دارم هنوز پاسخ قانع‌کننده‌ای برای این‌پرسش وجود ندارد که چرا ریاضیدانان باید احکام خود را ــ حتی در مواردی هم که این احکام بدون هرگونه اثباتی بدیهی به شمار می‌آیندــ ثابت‌کنند. همانطورکه پولیا نوشته است

> با اندکی اغراق می‌توان گفت که بشریت این اندیشه را ــ یعنی اندیشهٔ اثبات ریاضی را ــ تنها ازیك شخص وازیك‌کتاب‌آموخت، از شخص اقلیدس و ازکتاب اصول او.

حال بپردازیم به‌پرسش‌دوم‌خود، یعنی به‌پرسش‌تاریخی: ریاضیات چگونه توانست به‌علمی قیاسی ومنظم تبدیل شود؟ زیرا درابتدا، یعنی در تمدنهای باستانی و ماقبل یونانی مصر و بابل، ریاضیات صرفاً معرفت تجربی‌کاربردی و بسیارپیشرفته‌ای به‌شمار می‌آمد. در حقیقت، امروزه دیگر همه می‌پذیرندکه بابلیها حدود هزار سال پیش ازآغاز

ریاضیات یونان قادر بودند جواب مسائل ریاضی نسبتاً پیچیده‌ای را با تقریب بسیار خوبی پیدا کنند. لیکن، مطلقاً هیچگونه مدرکی وجود ندارد که حاکی از این امر باشد که بابلیها (چه رسد به مصریان) هرگز تلاش کرده باشند که قضایای ریاضی را به‌سبك دقیقی از اصول اولیه [معینی] استنتاج کنند. هنوز پاسخی برای این پرسش نیافته‌ایم که آیا ریاضیدانان مصر و بابل اصلاً مفاهیم علمی «قضیه»، «اثبات»، «استنتاج»، «تعریف»، «اصل متعارفی»، «اصل موضوع»، و غیره، را می‌شناختند یا نه. حتی در مورد این هم اطلاع قطعی نداریم که آیا بابلیها می‌دانستند چگونه قضایای کلی را باید صورتبندی کرد یا نه. ریاضیات تا پیش از تمدن یونان باستان چیزی جز دستورالعملهایی مفید (که گاهی حتی گردایه‌ای است از قواعد عملی بسیار ابتکاری) در ارتباط با نحوهٔ انجام کارهای ریاضی مشخص نیست. تحول اساسی در تاریخ ریاضیات، یعنی دگرگونی معرفت تجربی-عملی گذشته، طی تکامل تمدن یونان باستان به‌وقوع پیوست. بنابراین، پرسش ما عبارت است از اینکه: دلیل اینکه یونانیان به معرفت تجربی قناعت و اکتفا نکردند چه بود؟ چرا آنان یك علم قیاسی دارای ساختمانی منظم را جانشین «مجموعه‌ای دستورالعمل» ساختند؟ چه امری موجب شد که آنان به‌ناگهان به‌آنچه به‌کمك نظریه می‌توانستند ثابت کنند ـ نشان دهند یا رد کنند ـ بیشتر اطمینان کنند تا به‌آنچه عمل صرف، درستی یا نادرستیش را نشان می‌داد؟ آشکار است که ریاضیات قیاسی زمانی زاده شد که معرفت صرفاً ناشی از تجربه دیگرمورد قبول نبود؛ از آن پس، حتی آنچه تجربه همواره تأیید می‌کرد محتاج ملاحظات نظری بود.

به‌اعتقاد من شگفت‌انگیزترین جنبهٔ ریاضیات یونان، جنبه‌ای که آن را درهمان نگاه نخست از نظایر شرقی خود متمایز می‌سازد، وجود اثباتهای اصیل و واقعی است. علم یونانی تنها بـه بیان قضایا اکتفا نمی‌کند بلکه، مضافاً بر آن، برای هر کدام از آنها اثباتی ارائه می‌دهد. نقش اثبات در ریاضیات یونان کمتر از نقش آن در ریاضیات معاصر نیست؛ درواقع، در هر دو، نقش یکسانی دارد. افزون بر این، بیشتر اثباتهـای اقلیدس درنـوع خود الگو هستند و نسل اندر نسل معیار دقت ریاضی بوده‌اند، علیرغم ایـن واقعیت کـه ریاضیدانان جدید نقایصی دریك یا دو مورد می‌یابند، اثباتهای کتاب اصول در مجموع نمونه هستند.

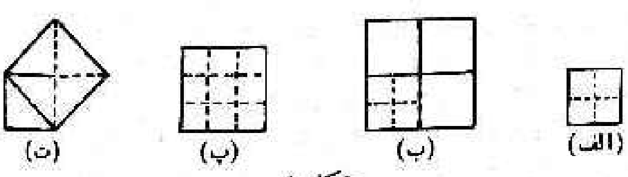
اکنون می‌توانم بازسازی خود را در مورد سیر تکامل اثبات ریاضی به‌شرح زیر خلاصه کنم. در ریاضیات یونان، اصطلاح فنی برای «اثبات» و «ثابت کـردن» فعل δείκνυμι (دیکنومی) است. اقلیدس در انتهای هر اثباتی آن را به‌کار می‌برد. او بحث خود را در مورد هـر قضیه با کلمات زیر به پایان می‌رسانـد ὅπερ ἔδει δεῖξαι یعنی «فهوالمطلوب» یـا «quod erat demonstrandum» «این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم».

این واقعیت که فعل یونانی دیکنومی از نظر ریشهٔ لغوی در ابتدا به‌معنای «اشاره کردن»، «نشان دادن»، و «قابل رؤیت ساختن» بوده است این فکر را به‌ذهن متبادر می‌سازد که شاید نخستین «اثباتها» در ریاضیات مرکب از نوعی «اشاره کردن» به واقعیتها یا «قابل رؤیت ساختن» آنهـا بوده است. در تأیید ایـن نظر حتی می‌توان مثالی از افلاطون آورد.

سقراط در گفتگوی منون از یك غلام بیسواد عامی می‌پـرسد که چگونه می‌توان مساحت مربعی را که هر کدام از اضلاعش برابر با دو ذرع است دو برابر کرد. سقراط برای ممانعت از هرگونه سوءتفاهمی، پس از طرح پرسش خود بی‌درنگ مربعی می‌کشد که هر کدام از اضلاعش طولی به‌اندازهٔ دو ذرع را نمایش می‌دهند. (به‌سخن دیگر: او مربعی را که مساحتش باید دو برابر شود قابل رؤیت می‌سازد.) از آنجا که سقراط به صراحت گفته بود که اضلاع مربع اصلی طولی به درازای ۲ ذرع دارند، نخستین فکری که به ذهن این جوان خطور می‌کند این است که شاید بتوان مساحت مربع را با دو برابر کردن طول اضلاع آن دو برابـر کـرد. لیکن سقراط شکل دیگـری رسم می‌کند تا به‌او نشان دهد که مربعی که طول اضلاعش دو برابر طول اضلاع مربع اصلـی است مساحتی چهـار برابـر آن دارد. غـلام ناگزیر می‌پذیرد کـه نخستین پاسخ او به پرسش اصلی، پاسخ غلطی بوده است. و پیش خود چنین می‌اندیشد: روشن است که مربعی با مساحتی دو برابر مساحت مربع اصلی باید اضلاع بلندتری داشته باشد؛ پس اضلاع مربع مطلوب باید بلندتر از ۲ ذرع باشند. اما بیشتر از چهار ذرع هم نمی‌توانند باشند چون مربعی به اضلاع ۴ ذرع مساحتی چهار برابر مساحت مربع اصلی خواهد داشت. پس طول مطلوب باید کمتر از ۴ ذرع هم باشد. از آنجا که سه مابین دو و چهار قرار دارد، شاید مربعی که ضلعش سه ذرع طول دارد مساحتی دو برابر مساحت مربع اصلی داشته باشد. بار دیگر واکنش سقراط این است که به کمك کشیدن شکلی نشان دهد که مربعی با ضلعی به‌طول سه واحد طول، مساحتی برابر با نه واحد سطح دارد، و درنتیجه بیش از اندازهٔ مطلوب بزرگ است. وسقراط عاقبت با کشیدن چهارمین شکل خود نشان می‌دهد که مربع حاصل از قطر مربع اصلی، مساحتی درست دو برابر مساحت آن دارد.

به‌اعتقاد من این قسمت از متون افلاطون نمونهٔ بارزی است از اینکه در نخستین مرحلهٔ تکامل ریاضیات یونان احکام ریاضی چگونه مورد تحقیق و تصدیق قرار می‌گرفتند؛ یعنی آنکه به‌کمك آن می‌توان فهمید که قضایا «اثبات می‌شدند»، البته «اثبات» به‌معنای منسوخ کلمه.

«مربع حاصل از قطر مربعی دیگر، مساحتی دو برابر آن دارد» ـ این قضیه‌ای بود که سقراط به صورت یك مسأله برای غلام بیسواد طرح کرد. تصاویر (ب) و (پ) شکل ۱ دو پاسخ نخستین را ابطال می‌کنند و نقص آنها را قابل رؤیت می‌سازند. درحالی که تصویر (ت) نه تنها پـاسخ صحیح را نشان مـی‌دهد (یعنی قضیهٔ مـورد نظر را صورتبندی می‌کند)، بلکه درعین حال «اثبات» قابل رؤیتی از صحت آن است.



شکل ۱

البته خطاست ادعا کنیم که دوره‌ای وجود داشته است که طی آن، اثباتهای ریاضی چیزی جز قابل رؤیت ساختن واقعیتها نبوده‌اند. نباید فراموش کنیم که اثبات با فکر کردن در مورد آنچه دیده می‌شود به‌دست می‌آید. همین تفکر است که آنچه را می‌بینیم به مدرك تجربی و قابل رؤیت تبدیل می‌کند. قصد من فقط تأکید بر این نکته است که هستهٔ قدیمیترین اثباتهای ریاضی از راه قابل رؤیت ساختن واقعیتها تأمین می‌شد.

ولی شکل نمونه‌وار اثباتهای اقلیدس بهیچوجه چنین نیست. اقلیدس، که آثارش برای ما درحکم قدیمیترین، و در عین حال شکل کلاسیك ریاضیات یونان است، بهیچوجه دربند قابل رؤیت ساختن چیزی نیست. توجه او بیشترمعطوف به‌این است که با ارائهٔ سلسله‌ای از

استدلالهای مجرد که در هر کدام می کوشد از دخالت هر گونه عنصر بصری پرهیز کند، خواننده را درمورد صدق قضایای خودقانع سازد. اکنون سعی می کنم تا این نظر خود را ــ یعنی اجتناب عامدانه و آگاهانه از توسل بــه عناصر بصری را ــ با اثبات اقلیدسی دو قضیهٔ بسیار ساده در مورد اعداد زوج و فرد روشن سازم. بنابریکی از این قضایا:

هرگاه تعداد دلخواهی عدد زوج را با یکدیگر جمع کنیم ، کل حاصل هم زوج خواهد بود.

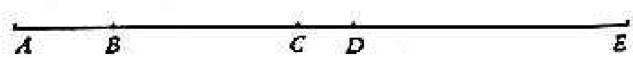
و بنابر قضیهٔ دوم:

هرگاه تعداد دلخواهی عدد فرد را با یکدیگــر جمع کنیم و این تعداد زوج باشد کل حاصل هم زوج خواهد بود.

البته، هردوی این قضایا برای کسی که با حساب آشنایی اندکی داشته باشد بیش از آن بدیهی به‌نظرمی آیند که نیازی به‌اثبات داشته‌باشند. این امراهمیت و جاذبهٔ نحوهٔ اثبات آنها را دوچندان می کند. در هر دو مورد، نخستین گام عبارت است از بیان یکی از مصادیق نمونه‌وار قضیه. برای مثال، در مورد اول

> فرض کنید که تعداد دلخواهی عدد زوج AB، BC، CD، DE بـا یکدیگر جمع شوند؛ می گویم که حاصل، AE، زوج است.

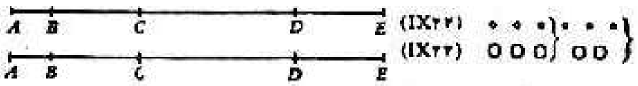
روشن است که اقلیدس اعداد مذکور را به‌صورت پاره‌خط در نظر می گیرد، زیرا هر یك را با دو حرف نمایش می‌دهد. همچنین ، اینکه او حاصلجمع آنها را AE می‌نامد، بیانگر این امر است که نزد خودچنین تصورمی کرده است که حاصلجمع، ازپشت سرهم قراردادن این پاره‌خطها حاصل می‌شود:



حال، اثبات چنین ادامه می‌یابد:

> ازآنجا که هر کدام ازاعداد AB، BC، CD، DE زوج است، هر کدام نیمی‌دارد، بنابراین کل آنها یعنی AE هم‌نیمی دارد. اما عدد زوج عددی است که به دو جزء مساوی تقسیم‌پذیر باشد. پس AE زوج است. فهوالمطلوب

باید روشن شده باشد که این اثبات با آن نوع «قابل رؤیت ساختنی» که قبلاً در موردش سخن گفتم هیچ وجه اشتراکی ندارد. بهیچوجه‌نمی‌توان ادعا کرد که پاره‌خطهای AB، BC، وغیره، نمایش قابل رؤیت و دقیق «اعداد زوجی» هستند که به ما نشان می‌دهند که حاصلجمعشان، یعنی پاره‌خط AE، تنها‌می‌تواند «عددی زوج» رانمایش دهد. زیرا کاملاً بیمعنی است کــه بگوییم پاره‌خط دلخواهی [تنها] می‌تواند نمایش قابل رؤیت «عددی زوج» باشد. لااقل به این دلیل که، در اثبات قضیهٔ دوم همان پاره‌خطها (با همان حروف) اعداد فرد رانمایش می‌دهند. درواقع بهیچوجه نمی‌توان اعداد زوج و فرد را، با استفاده ازپاره‌خط برای نمایش آنها، ازیکدیگرتشخیص داد. زیرا پاره‌خط را همیشه می‌توان به دو نیم تقسیم کرد. ولی، بنا بر تعریف، اعداد فرد را هرگز نمی‌توان به دو نیم تقسیم کرد درحالی که اعداد زوج را می‌توان.



شکل ۲

بنابراین درست است که اقلیدس طبق معمول، قرار داد نمایش اعـداد به وسیلهٔ پـاره خط را رعایت می‌کند، ولی فعل «δείξαι» («نشان‌دادن»، «چیزی‌را نشان‌دادن») را صرفاً به‌معنای مجازیش به‌کار می‌برد. او از نشان دادن چیزها سخن می گوید، ولی استدلالهای او اساساً مجرد هستند؛ مراحل آنها را نمی‌توان دید.

برای اینکه آسانتر تشخیص دهیم که اقلیدس تا چه اندازه از این امر پرهیز دارد که صدق قضایای ساده را قابل رؤیت سازد (یعنی آنها را «ثابت کند» ، البته به‌معنای ابتدایی این لفظ) ، کافی است که روش اثبات او (به‌کمك پـاره‌خطها) را بـا روش اثبات ابتدایـی آنها مقابـه کنیم. می‌دانیم که درآن موقع قضایای مربوط به‌اعدادفرد و زوج در ابتدا به کمك سنگریزه نمایش داده می‌شدند، بدین صورت که اعـداد زوج متضمن تعـدادی مساوی از سنگریزه‌هـای سیاه و سنگریزه‌های سفید بودند، در حالی که اعداد فرد با افزودن یا کاستن یك سنگریزه بـه ، یا از، یکی از این دو نوع سنگریزه نمایش داده می‌شدند. این روش اثبات روشی بسیار ابتدایی است، ولی درعوض مضمون‌اصلی قضیه‌را قابل‌رؤیت می‌سازد. تنها کافی است که به‌ردیفهای سنگریزه نگاهی بیفکنیم تا خود را در مورد درستی قضیه قانع کنیم. زیرا سنگریزه‌ها به‌ما امکان می‌دهند تا ببینیم که‌آیا عددی زوج است یا نیست.

به نظر می آید که اقلیدس به این دلیل اثباتهای بصری را رها کرد که می‌خواست اثباتش برای همهٔ موارد ممکن معتبرباشد. به‌همین دلیل بود که پاره خط را جانشین سنگریزه کرد، زیرا نباید فراموش کرد که:نمی‌توان‌اعدادمخلوط($۵\frac{۲}{۳}$، ۳/۵، وغیره) را به کمك سنگریزه نمایش داد . ولی ، پاره‌خط هم قرارنیست به‌جای عدد مخلوط به‌کار برود،بلکه به‌جای عدد دلخواه‌فرد یازوج مورد استفاده قرار می گیرد. افزون براین، اقلیدس به‌خاطردستیابی به تعمیم بیشتر بود که به‌استدلال منطقی روی آورد. به‌همین دلیل نقطهٔ شروع اثبات اویادآوری‌این‌امر است که عدد زوج، بنا بر تعریف، عددی است که به دو جزء مساوی تقسیم‌پذیر باشد. از این مطلب به‌وضوح نتیجه می‌شود که حاصلجمع اعداد زوج هم عددی زوج است، و . . .

اما، این نظر که اقلیدس، به‌دلیل تلاشش برای دستیابی به‌تعمیم هرچه بیشتر، قادر نبود که اعداد فرد و زوج را به‌نحو دقیقی نمایش دهد، ما را به‌یادقسمت جالب‌توجه دیگری ازاثرافلاطون می‌اندازد. منظورم‌آن قسمتی است که درآن‌سقراط توضیح می‌دهد که‌تا آنجا که به حساب مربوط می‌شود ، اعداد نمی توانند پیکر قابل‌رؤیت و قابل لمسی‌داشته باشند؛آنها صرفاًعناصری آرمانی هستندکه تنها ازراه‌تفکر محض دریافتنی می‌باشند.

به‌این‌ترتیب می‌بینیم که‌در ریاضیات یونان، چنان‌که نمونه‌های آن در اثباتهای اقلیدس دیده می‌شود، با پرهیز از استدلال بصری تلاش می‌شودبه‌موضوع ریاضی به‌عنوان چیزی نگریسته شود که‌صرفاً به عالم تفکر محض تعلق دارد. این گرایش در تکامل علم علت اصلی ارائهٔ‌جالبترین اثباتهای اقلیدس بوده‌است. مثال سوم من درست یکی از این اثباتهای اصیل اقلیدسی است.

درکتاب‌اصول قضیه‌ای وجود دارد (VII ۳۱) که خصوصیت

جالبی از اعداد مرکب را بیان می‌کند. ولی پیش از آنکه به تفصیل به آن بپردازم سه تعریف را که برای فهم آن لازم است یادآوری می‌کنم. این سه تعریف عبارت‌اند از:

[VII ۲]: «عدد، کثرتی متناهی است که از واحدها تشکیل یافته است.»

[VII ۱۱]: «عدد اول عددی است که تنها بر واحد تقسیم‌پذیر باشد.»

[VII ۱۳]: «عدد مرکب (یعنی عددی که عدد اول نیست) عددی است که بر عددی تقسیم‌پذیر باشد.» [یا به‌اصطلاح ریاضی عددی است که عددی آن را عاد کند.]

اما قضیه‌ای که می‌خواهم اثباتش را دراینجا باتفصیل بیشتری مورد بررسی قرار دهم می‌گوید کـه «هر عدد مرکب بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است». اثبات آن به‌قرار زیر است.

اثبات. فرض کنید a عدد مرکبی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که a برعدد اولی تقسیم‌پذیر است. ازآنجا که a مرکب است، دست کم یك عدد، مثلاً b، باید وجود داشته باشد که a بر آن تقسیم‌پذیر باشد ــ بنا بر تعریف خود «عدد مرکب»: «عدد مرکب عددی است که بر عددی تقسیم‌پذیر باشد.» اما b خود یا اول است یا مرکب، زیرا تعاریف «عدد اول» و «عدد مرکب» هرگونه امکان و حالت (سوم) دیگری را منتفی می‌کند. در حالت اول (کـه b اول است) قضیه ثابت می‌شود، زیرا a بر b تقسیم‌پذیر، و b عدد اول است. ولی در حالت دوم، عددی، مثلاً c، باید وجود داشته باشد که b بر آن تقسیم‌پذیر باشد (باز بنا بر تعریف «عدد مرکب»). اما واضح است که a هم بر c تقسیم‌پذیر خواهد بود؛ بنابراین اگر c اول باشد قضیه ثابت شده است. ولی اگر c مرکب باشد، عددی باید وجود داشته باشد که آن را عاد کند، و هکذا تا آخر. در این برهان، این امر مورد تأکید قرار می‌گیرد که این روند باید سرانجام به‌پایان رسد؛ زیرا درغیراین‌صورت دنباله‌ای نزولی از مقسوم‌علیه‌های مرکب a خواهیم داشت که نامتناهی خواهد بود. (به‌اعتقاد یونانیان هر عدد همواره بزرگتر از هریك از مقسوم‌علیه‌های خود است.) لیکن وجود یك‌چنین دنبالهٔ نامتناهی از مقسوم‌علیه‌های عدد دلخواهی چون a، تعریف عدد را نقض می‌کند: «عدد، کثرتی متناهی است که از واحدها تشکیل یافته است.» (واحد کوچکترین مقسوم‌علیه هـر عددی است). پس a باید بر عدد اولی تقسیم‌پذیر باشد و قضیه اثبات می‌شود.

در این اثبات نه چیزی «نشان داده شده» و نه چیزی «قابل رؤیت ساخته شده» است. درست است که اقلیدس از پاره‌خط استفاده می‌کند تا مورد نمونه‌واری از قضیهٔ خود را روشن سازد؛ او عدد مرکب دلخواهـی چون (a) را با چنین پاره‌خطی نمایش می‌دهد، و مقسوم‌علیه آن (b) را با پاره خطی کوتاهتر، اما این کار او چیزی جز رعایت قراردادی سنتی‌ومنسوخ نیست. زنجیرهٔ استدلال او را نمی‌توان دید. اگر بخواهیم آن را درك کنیم، سودی ندارد که به‌اعداد (به‌صورتی که با پاره‌خط نمایش داده شده‌اند) نگاه کنیم؛ به جای این کار باید تعاریف انواع مختلف عدد را به خاطر بسپاریم، زیرا اثبات فقط بر آنها استوار است.

اثبات اقلیدسی که هم‌اکنون بررسی کردیم سوای اینکه استدلالی غیر قابل رؤیت است، لااقل دو جنبهٔ جالب توجه دیگر نیز دارد که مایلم دراینجا آنها را به‌طور صریح مورد تأکید قرار دهم. جنبهٔ اول عبارت است از اینکه: ما مجبور شدیم وجود عدد اولی را ثابت کنیم که مقسوم‌علیه عدد مرکب دلخواهی چون a بود، و دلیل قطعی این امر را از راه ابطال [فرض] «عدم وجود» آن به‌دست آوردیم. یعنی آنکه نشان دادیم که عدم وجود آن امری محال است. به‌سخن دیگر: اثبات ما به‌اصطلاح «اثباتی غیرمستقیم» بود، که در ریاضیات روشی بسیارمتداولی است، یعنی روشی است که به‌کمك آن، صدق یك حکم معین از طریق نشان دادن کذب فرض نقیض آن اثبات می‌شود.

جنبهٔ دیگر اثبات مذکور که باید مورد تأکید قرار گیرد به‌شرح زیر است. برای اثبات غیرمستقیم حکم: «هر عدد مرکب دلخواه بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است»، نخست نقیض این حکم را صورتبندی کردیم تا بتوانیم آن را ابطال کنیم، زیرا ابطال حکم اخیر اثبات حکم اصلی است. بنابراین گفتیم: «عدد a تعدادی نامتناهی مقسوم‌علیه دارد که هر کدام عددی مرکب است.» حال نکتهٔ جالب‌توجه این است که ببینیم چه امری نادرستی حکم اخیر را آشکار می‌سازد: این امر که حکمی آشکارا متناقض است. زیرا، عبارت «a عدد است» بدین معناست که «مجموعه‌ای است متناهی ومتشکل از واحدها»؛ و این نقیض این حکم است که «a تعدادی نامتناهی مقسوم‌علیه دارد.» با پذیرفتن صدق حـکم اول از این دو حکم متناقض، در مورد حکم دوم کاری نمی‌توانیم بکنیم جز اینکه آن را به‌عنوان حکمی کاذب رد کنیم.

به‌اعتقاد من مهمترین گام تاریخی در تدارك زمینهٔ تحول ریاضیات تجربی و استقرایی ماقبل یونان به نظامی قیاسی، دقیقاً کاربرد همین روش اثبات غیر مستقیم بود. لیکن پیش از آنکه به منشأ این روش استادانه بپردازم، می‌خواهم، ولو به‌طور اجمال، دربارهٔ مشهورترین کاربرد آن در آثار اقلیدس سخن گویم. (فکر می‌کنم بسیاری این اثبات اقلیدس را به خاطر دارند، چون همهٔ ما آن را در دوران تحصیلات خود درمدرسه لااقل یك بار آموخته‌ایم.)

بنا بر قضیهٔ معروفی در حساب (IX ۲۰): «دنبالهٔ اعداد اول نامتناهی است.» اثبات غیر مستقیم این قضیه به صورت زیر است. نخست نقیض حکمی را که می‌خواهیم ثابت کنیم صورتبندی می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که کاذب است، و بنابراین نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ اصلی باید صادق باشد.

اگر دنبالهٔ اعداد اول نامتناهی نباشد، می‌توان دنبالهٔ کامل آنها را نوشت

$$۲, ۵, ۳, \ldots, P$$

که در آن P بنا بر ادعای مذکور «آخریـن و بزرگترین عدد اول» به شمار می‌آید. حال ببینیم این حکم چه ایرادی دارد؟ ما می‌توانیم عددی مانند Q بسازیم (که عبارت باشد ازحاصلضرب همهٔ اعداد اول به اضافهٔ یك)

$$Q=(۲\cdot۳\cdot۵\cdot\ldots\cdot P)+۱$$

عدد Q بزرگتر از P است و درنتیجه، ازآنجا که بنابرادعای مذکور، Q نمی‌تواند عدد اول باشد، باید عددی مرکب باشد. (P، بنابرفرض، بزرگترین عدد اول است.) بنابراین، Q باید برعدد اولی تقسیم‌پذیر باشد. زیرا هر عدد مرکب بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است. لیکن، همهٔ اعداد اول موجود، بنا بر فرض، در دنبالهٔ مذکور جای دارند. اما، حاصل تقسیم Q بر هر کدام از این اعداد باقیمانده‌ای برابر با یك دارد؛ وبنابراین، عدد اول موردنظری که مقسوم‌علیه Q باشد هیچکدام ازاعداد دنباله به‌اصطلاح کامل مورد ادعا نیست. پس با تناقضی روبرو هستیم؛ یعنی آنکه، در ابتدا حکم کردیم که: «دنبالهٔ متشکل از اعداد اول، کامل است.» ولی، ازسوی دیگر، اکنون باید بپذیریم که: «همان دنباله کامل نیست.»

این تناقض، نادرستی این حکم را که دنبالهٔ کامل اعداد اول را می‌توان نوشت آشکار می‌سازد. نه، این حکم نمی‌تواند صادق باشد، و در نتیجه صدق حکم مخالف آن آشکار است: «دنبالـهٔ اعداد اول

نامتناهی است.»

حال، [با در نظر گرفتن این مطالب] حدس من در مورد این مسألهٔ تاریخی این است که روش اثبات غیرمستقیم را ریاضیدانان نه خود آفریدند و نه آنکه نخستین کسانی بودند که آن را مورد استفاده قرار دادند. آنان این روش را، به‌اصطلاح حاضر و آماده، از فلاسفهٔ ایلیایی گرفتند. همان طور که احتمالاً اطلاع دارید، فلاسفهٔ ایلیایی با استفاده از این روش احکام متناقض بسیاری را، که در نقطهٔ مقابل تجربهٔ متعارف قرار داشتند، اثبات می کردند. برای مثال، زنون محال بودن حرکت را به‌طور غیرمستقیم ثابت می کرد، در حالی که تجربهٔ آگاهانه نشان می‌داد که حرکت، البته، امری واقعی است.

در این مقاله مجال آن نیست که درمورد فلسفهٔ ایلیایی توضیحات بیشتری بدهم . در نتیجه به شرح مهمترین جنبه‌های آن که چارچوب ریاضیات قیاسی را هم مشخص می کند اکتفا می کنم.

در درجهٔ اول، این فلاسفه قابل اطمینان بودن حواس را مورد سؤال قرار می‌دادند. آنان می گفتند که: حقیقت نمی‌تواند بر تجربیات حسی استوار باشد. به اعتقاد آنان علیرغم انواع شواهدی که توسط حواس و تجربهٔ روزانهٔ ما تأمین می گردند، واقعیت و احکام صادق دربارهٔ آن تنها از طریق تفکر محض قابل اثبات است، زیرا حواس و تجربه گمراه‌کننده هستند. به‌همین دلیل بود که اقلیدس می کوشید تا در اثباتهای ریاضی خود از استدلالهای بصری پرهیز کند. اعداد نمی‌توانند پیکر قابل رؤیت و قابل لمسی داشته باشند، و تنها از راه تفکر محض می‌توان به‌صدق احکام مربوط به‌آنها پی برد.

جنبهٔ دوم در دیدگاه این فلاسفه این است که: پارمنیدس، و به‌طور کلی همهٔ فلاسفهٔ ایلیایی، فقدان تناقض را تنها معیار حکم صادق می‌دانستند. دراینجا نیازی به‌تأکید نیست که در ریاضیات هم‌ضمانت سازگاری هر نظام بسته‌ای تنها منوط است به‌فقدان تناقض.

نقش تعیین‌کنندهٔ تناقض در همهٔ بررسیهای مربوط به صدق، این امر را هم توضیح می‌دهد که چرا فلاسفهٔ ایلیایی در نظام فلسفی خود چنان ارزش عظیمی برای اثبات غیر مستقیم قائل بودند . آنان هیچکدام از احکام خود را اثبات نمی کردند؛ به‌جای این‌کار، احکام نقیض را ردمی کردند، یعنی نشان می‌دادند که این احکام مستلزم نوعی تناقض هستند. برای مثال، پارمنیدس سه امکان را از یکدیگر تمیز می‌داد: (۱) «هستی وجود دارد»، (۲) «هستی وجود ندارد»، و (۳) «هستی وجود دارد و وجود ندارد»، آنگاه امکان دوم وسوم رابه‌عنوان احکامی آشکارا متناقض طرد می کرد، و این امر دلیل قانع کننده‌ای برای درستی امکان اول بود: «هستی وجود دارد.»

حال پرسشی که مطرح می‌شود این است که چه امری سبب شد تا ریاضیدانان این شکل بخصوص اثبات را از فلاسفه اقتباس کنند؟ به اعتقاد من به یاری این روش ، اثبات واقعیت شگفت‌انگیزی در ریاضیات امکان‌پذیر گشت، که در غیر این صورت، یعنی بدون توسل به‌چنین شیوهٔ تفکری، هرگز قابل اثبات نبود. منظورم این واقعیت است که: نخستین ریاضیدانان یونان به‌دشواری (یا شاید بهتر است بگوییم که به محال بودن) بیان رابطهٔ ضلع و قطر یك مربع به‌وسیلهٔ اعداد، پی برده بودند. این واقعیت از این نتیجه می‌شود که این دو مقدار خطی ــ ضلع و قطر ــ مقادیری نامتوافق هستند. ولی فراموش نکنید که چرا این مفهوم (نامتوافق بودن) ــ که از نظریه سرچشمه می گیرد و نه از تجربه ــ وارد ریاضیات شد. بنابر اثبات آن: اگر ضلع وقطر مربع متوافق باشند، یك عددمی‌بایست هم‌فرد باشدهم‌زوج. ریاضیدانان برای آنکه از این تناقض پرهیز کنند مجبور شدند مفهوم «نامتوافق» را تعریف کنند. بنابراین می‌بینیم که کاربرد روش اثبات غیر مستقیم به‌پیدایش وآفرینش مفهوم علمی جدیدی منجر شد. اما درست همین امر منشأ تأسیس ریاضیات بر مبنای تعاریف و اصول موضوع بود.

در نتیجه حدس من این است که: ریاضیدانان یونان تحت‌تأثیر فلسفهٔ ایلیایی علم خود را به‌نظامی قیاسی تبدیل کردند. برای آنکه این نظام را صورتی سازگار بخشند، یعنی به‌صورتی درآورند که دارای تناقض نباشد، آنان از اصول معینی آغاز می کردند که آنها را ازپیش و بدون هیچ برهانی می‌پذیرفتند. آنگاه، احکام (یا قضایا) می بایست خود را با اصول اثبات نشده هماهنگ سازند، یعنی آنکه خود را بدون تناقض با آنها تطبیق دهند.

حال حدس خود را به کمك مثالهای زیر روشن می‌سازم.

پیشتر به‌بحث دربارهٔ این قضیهٔ حساب پرداختیم که: «هر عدد مرکب a بر عدد اولی تقسیم‌پذیر است.» در اثبات آن خواندیم که: اگر عدد اول مطلوب پیدا نشود، معنی آن این خواهد بود که: عدد a بر اعدادی تقسیم‌پذیر است که دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهند که هر کدام از آنها کوچکتر از دیگری است: امری که در مورد اعداد محال است. حال، وقتی این مطلب را در خود متن اصلی می‌خوانیم پرسشی که پدید می‌آید این است: چرا اقلیدس تأکید می کند که روند نامتناهی که وی توصیف کرده است «در مورد اعداد» محال است؟ از عبارات اوچنین برمی‌آید که گویا حوزهٔ دیگری وجود دارد که در آن، حالت مشابه این امرممکن است. این ملاحظه ما را به‌یادزنون ایلیایی می‌اندازد. زیرا نخستین بار، هم او بود که استدلال کرد جسم درحال حرکت نخست بایدنصف مسافت باقیمانده تا مقصد را بپیماید؛ لیکن این امرمستلزم آن است که نصف این نصف را بپیماید، والی غیرالنهایه. نکتهٔ مورد نظر زنون این بود که جسم در حال حرکت مسیری را طی می کند که از تعدادی نامتناهی فاصله تشکیل یافته است، که هر کدام کوتاهتر از فاصلهٔ قبلی است. ولی این استدلال را می‌توان به‌صورت این ادعا هم تعبیر کرد که هر پاره‌خط مستقیمی، مانند AB، را می‌توان به‌تعدادی نامتناهی پاره‌خط تقسیم کرد به طوری که هر کدام کوتاهتر از قبلی باشد؛ اما این گفته، صرفاً بیان دیگری از این مطلب است که مقسوم‌علیه‌های AB دنباله‌ای نزولی و نامتناهی تشکیل می‌دهند. بنابراین چنین به‌نظر می‌آید که آثار نفوذ زنون در اثبات قضیهٔ مورد نظر ما در حساب منعکس است. زیرا واضع این اثبات راه خود را کج می کند تا این نکته را مورد تأکید قرار دهد که اثباتش تنها برای اعداد معتبر است، و انگیزهٔ او برای این کار احتمالاً این بوده که موردی را که زنون بررسی کرده بود، کنار گذارد.

درابتدای مقاله به‌تقسیم شاخه‌های مختلف تحقیقات علمی به‌دو گروه اصلی اشاره کردم: علوم تجربی و علوم غیر تجربی. بدون شك منشأ همهٔ علوم تجربی در نهایت تجربهٔ حسی است. لیکن، حواس‌ما قابل اعتماد نیستند . افزون بر این، روش علوم تجربی البته استقراء است، که این خود مستلزم عدم قطعیت قابل توجهی است. بنابراین علوم تجربی ما چیزی نیستند جز ــ به‌قول برخی از فلاسفهٔ امروزی ــ برنامه‌هایی تحقیقاتی، حدسهایی جسورانه وتلاشهایی صادقانه، نخست، برای تصدیق آنها، و سپس، برای ابطال همانها. از سوی دیگر، یقین معرفت ریاضیات قیاسی ازچه تشکیل شده است؟ بدون شك، قضایای ریاضی از راه برهان تثبیت می‌شوند، و این نشان می‌دهد که قضایای مورد نظر به‌طور منطقی از اصول نتیجه می‌شوند، به طوری که، اگر اصول صادق باشند، قضایا هم به‌یقین صادق خواهندبود. بنابراین یقین قضایا نسبت به اصول تعیین می‌شود . لیکن ، موارد مشهوری وجود دارند که در آنها تصمیم در مورد صدق برخی اصول ریاضی امری کم‌وبیش دلخواهانه‌بوده است. (این‌موضوع را حتی درمرحلهٔ نخستین

دورهٔ باستان، یعنی لااقل درزمان قبل از ارسطو، نیز به‌خوبی می‌دانستند.) منظور من فقط اختلاف هندسهٔ اقلیدسی و نااقلیدسی نیست. (یعنی به اصل موضوع توازی اشاره نمی‌کنم، که نباید به طور مقدم بر تجربه در موردش تصمیم گرفت.) اصل اقلیدسی دیگری ـ از نوع اصول متعارفی ـ نیز وجود دارد که از شهرت کمتری برخوردار است: «کل بزرگتر از جزء است.» به نظر می‌آید که این اصل نه تنها در برابر استدلال شبهه‌انگیز زنون موضع می‌گیرد (استدلالی که درغیراین‌صورت ابطال‌ناپذیر می‌بود): «نصف زمان برابر است با دوبرابر آن»، بلکه همچنین، اگر اغراق گویی نکنم، در برابر آن شیوهٔ تفکری هم که از ویژگیهای نظریهٔ جدید مجموعه‌هاست موضع می‌گیرد: «یک زیرمجموعهٔ نامتناهی، یک جزء واقعی از مجموعهٔ نامتناهی دیگر، با کل مجموعه معادل است.»

به اعتقاد من بررسی تاریخ ریاضیات باستان به این شکل، ممکن است به نحوی اساسی به حل مهمترین مسائل روز در زمینهٔ فلسفهٔ علم هم یاری رساند.

ترجمهٔ شاپور اعتماد

* Cohen R., Wartofsky M. (eds) *Methodology, Metaphysics and the History of Science*, 1984, D. Reidel Publishing Company, pp 283-294.

مراجع

1. Hempel C. G., *Philosophy of Natural Science*, New York, Prentice-Hall, 1966.
2. Hempel C. G., "Science unlimited?", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 3 (1973) 31-46.
3. Lakatos I., "Falsification and the methodology of scientific research programmes." In *Criticism and the Growth of Knowledge*, edited by I. Lakatos and A. Musgrave, Camberidge: Cambridge University Press, 1970, pp 91-195.
4. Polya G., *How to Solve It?*, Princeton: Princeton University Press, 1945.
5. Szabó Arpad, *Anfänge der Griechischen Mathematik*, München and Vienna: Oldenberg, 1969.