به کار بستن حرکت اعداد و اشکال در آموزش ریاضی

آرش رستگار

خلاصه: در آموزش سنتی هندسه در نظام آموزشی ریاضی ایران همه اشکال صلب در نظر گرفته می‌شوند و اولین مصداق حرکت در هندسه کاربرد تبدیلات است که آن هم به حرکت اشکال صلب مربوط می‌شود. اما دانش‌آموزان توانمند در هندسه پس ازپیشرفت به سطحی می‌رسند که اشکال را در حال حرکت تصور می‌کنند. در این مقاله بر آن هستیم که عواقب آموزشی مطالعه حرکت اعداد و اشکال را از سال‌های اول دبستان تا پایان ریاضیات مدرسه را مورد بررسی قرار دهیم.

مقدمه- آموزش حرکت در ریاضیات مدرسه از یک طرف مفهوم استدلال هندسی را تعمیق می‌کند و از طرف دیگر باعث حرکت عدد و مفهوم پایداری محاسبه و تقریب زدن در محاسبات عددی می‌گردد و در نهایت باعث تعمیق مفهوم متغیر و جا افتادن قضیه اساسی حسابان می‌گردد.

تا جایی مفهوم متغیر و مشتق و انتگرال می‌تواند برای اثبات ساده‌ترین و عمیق‌ترین احکام هندسی مانند قضیه فیثاغورس به کار برود. حرکت پیوسته اعداد و اشکال ریاضیات در دسترس سبک شناختی پیوسته در کنار سبک شناختی گسسته قرار می‌دهد. در این سبک شناختی موجودات ریاضی در حال دگردیسی در نظر گرفته می‌شوند و قوانین و احکام و فرضیات برای موجوداتی که در حال دگردیسی هستند مورد بررسی قرار می‌گیرند. در صورتی که در سبک شناختی گسسته موجودات ریاضی به شکل صلب و بدون حرکت و تغییر مطالعه می‌شوند و این برای سبک شناختی پیوسته ناقص و ناکارآمد است. در اینجا از آموزش ریاضی در سطح دبستان شروع می‌کنیم و مرتبه به مرتبه حضور مفهوم حرکت و تغیر اعداد و اشکال را از لحاظ شناختی مورد مطالعه قرار می‌دهیم و عواقب شناختی این نحوه آموزش را بررسی می‌کنیم.

۱- حرکت عدد روی محور اعداد

انطباق حرکت نقطه روی خط با حرکت عدد در بین اعداد حقیقی اولین بار توسط خیام انجام گرفت که مقدمه فرمولبندی اعداد منفی توسط دکارت و شکل‌گیری مختصات دکارتی شد. آموزش حرکت پیوسته اعداد در سطح کلاس اول دبستان با مفاهیم عدد گسسته شمارشی و سپس مفاهیم عدد بین دو عدد دیگر و سپس مفاهیم نصف و کمی مانده به و کمی بعد از یک عدد انجام می‌شود. در اینجا مفهوم دو عدد با فاصله کمتر از یک مطرح می‌شود. برای اینکه این مفاهیم در بستر زندگی روزمره آموزش داده شوند از مفهوم اندازه‌گیری استفاده می‌شود. اندازه‌گیری به ما امکان می‌دهد تنوع مفهوم واحد را مطرح کنیم و یک طول را با کمک دو واحد اندازه‌گیری کنیم و حاصل اندازه‌گیری را مقایسه کنیم. مفاهیم یک عدد و نصفی و کمی مانده به یک عدد و کمی بعد از یک عدد به ما کمک می‌کنند حاصل اندازه‌گیری را به صورت کلامی بیان کنیم و به طور غیرمستقیم مفهوم تقریب زدن را وارد مهارت اندازه‌گیری نماییم. البته به کمک اندازه‌گیری محور اعداد مثبت ساخته می‌شود، اما زمینه برای مطرح شدن تمام خط به عنوان مدلی از اعداد مثبت و منفی فراهم می‌شود. مفاهیم یک عدد و نصفی و کمی بعد از یک عدد و کمی قبل از یک عدد به سادگی قابل تعمیم به محور کامل اعداد مثبت و منفی هستند. هرچند در کلاس ششم اعداد اعشاری نیز معرفی شده‌اند و این زمینه را برای دقیق‌تر کردن اندازه‌گیری به کمک اعداد منفی و مثبت را فراهم می‌کند. پیش از اعداد منفی مشابهت ساعت و محور اعداد قدم مهمی برای درک مفهوم محور اعداد و حرکت پیوسته عدد روی محور را فراهم می‌کند. بسیاری از مفاهیم مربوط به اعداد مانند یک عدد و نیم و کمی مانده به یک عدد و کمی بعد از یک عدد در بستر اندازه‌گیری زمان معنی جدیدی پیدا می‌کنند که در کنار مفاهیم اندازه‌گیری طول، یادگیری را تعمیق می‌کنند.

۲- حرکت عقربه روی ساعت

ساعت بسیار شبیه یک محور اعداد است که البته شکل دوار به خودش گرفته است. می‌توان یک محور اعداد را تصور کرد که به دور یک ساعت پیچیده شده است.

برای این کار لازم است محورهای اعدادی رو به راست و محورهای اعدادی رو به چپ را، هر دو به کار ببریم. این کار همه مقدمه را برای کار کردن با محور اعداد منفی را فراهم می‌کند و هم به دانش‌آموز کمک می‌کند با محوری در جهت حرکت عقربه‌های ساعت آشنایی داشته باشد. در واقع شمارش به پیمانه دوازده نیز در عقربه‌های ساعت نهفته است که مفهوم شمارش را نیز کمی به پیش می‌برد. می‌توان شمارش به پیمانه عدد ده و یا اعداد دیگر را که به طور طبیعی در زندگی روزمره پیش می‌آیند با کمک مفهوم باقی‌مانده و یا حتی به صورت مقدمه‌ای برای مفهوم باقی‌مانده معرفی کرد. در این روش آموزش مفاهیم ضرب و تقسیم در کنار هم و به موازات یکدیگر معرفی می‌شوند. مفاهیم راس ساعت و کمی مانده به راس ساعت و کمی بعد از راس ساعت در چارچوب حرکت عقربه روی ساعت معنی جدیدی پیدا می‌کنند که به درک مفهوم حرکت پیوسته اعداد کمک می‌کنند. حرکت نقطه روی محور اعداد و حرکت عقربه روی ساعت را می‌توان دو مصداق هندسی از حرکت تصور کرد و آن را مقدمه‌ای برای حرکت اشکال ساده هندسی قرار داد. ساده‌ترین مصداق حرکت یک شکل پیچیده‌تر از نقطه مفهوم حرکت یک پاره‌خط است که در زندگی روزمره با کمک مفهوم رشد قابل پیاده‌سازی است. مفهوم رشد طول قابل ارتباط با مفهوم اندازه‌گیری نیز می‌باشد و می‌تواند باعث تعمیق مهارت اندازه‌گیری و حرکت پیوسته نیز باشد. در مرحله بعدی می‌توان حرکت اشکال ساده هندسی مثل مثلث و مربع را در قالب مفهوم رشد مطرح کرد.

۳- حرکت اشکال ساده هندسی

رشد مثلث متساوی الاضلاع و رشد مربع اجازه حرکت اشکال هندسی را به ما می‌دهند. چون این نوع حرکت مجرد است می‌توان کوچک شدن مربع و کوچک شدن مثلث متساوی الاضلاع را نیز در نظر گرفت.مستطیلی را می‌توان در یک جهت کوچک یا بزرگ کرد و در جهت دیگر آن را ثابت نگه داشت. حرکت مثلث در بین مثلث‌های دلخواه پیچیده‌تر است. می‌توان از یک مستطیل شروع کرد که همزمان دو ضلع موازی آن بزرگ می‌شوند و دو ضلع دیگر کوچک می‌شوند و سپس حرکت مثلث دلخواه را مطرح کرد. مفاهیم چهارضلعی و حرکت

چهارضلعی‌ها نیز می‌تواند در حالت کلی و هم در حالات خاص مطرح شود. مثلا یک مستطیل را چنان در بین مستطیل‌ها حرکت دهیم که تبدیل به یک مربع شود و یا یک مربع متساوی الساقین را چنان در بین مثلث‌های متساوی الساقین حرکت دهیم که تبدیل به یک مثلث متساوی الاضلاع گردد. یک متوازی الاضلاع را می‌توان چنان در بین متوازی الاضلاع‌های با همان طول اضلاع حرکت داد که تبدیل به یک مستطیل شود و یک لوزی را می‌توان چنان در بین لوزی‌هایی با همان طول اضلاع حرکت داد که تبدیل به یک مربع شود. در اینجا مفهوم زاویه و تغییر یک زاویه و حرکت یک زاویه در یک شکل را می‌توان مطرح کرد. مفهوم زاویه و حرکت زاویه می‌تواند به کمک عقربه‌های ساعت و حرکت آنها اندازه‌گیری شود و کم کم با تبدیل واحد مفاهیم درجه و رادیان مطرح شوند. سپس حرکت مثلث متساوی الساقین و حرکت مثلث‌های دلخواه و حرکت چهارضلعی‌ها به زبان حرکت اضلاع و زوایا در کنار هم در نظر گرفته شوند. حرکت اشکال بستر مناسب‌تری برای معرفی مفهوم تقریب است تا حرکت اعداد. این که یک شکل با اشکال ساده هندسی تقریب زده شود شروع خوبی برای مفهوم تقریب است که می‌تواند به سوی تقریب محاسبات ساده نیز حرکت و سوق داده شود.

۴- تقریب زدن محاسبات

تقریب زدن محاسبات را می‌توان به زبانی تقریب زدن یک ساختار محاسباتی دید و درستی مفهوم تقریب را می‌توان به زبانی پایداری مفاهیم محاسبه در این ساختارها دید. برای مثال، اینکه به جای جمع کردن دو عدد، از اعدادی نزدیک به آنها شروع کنیم و انتظار داشته باشیم حاصل جمعی نزدیک به حاصل جمع اولیه بدست آوریم به نوعی یک پایداری برای جمع اعداد است. یک مصداق این پایداری به کار بردن تقریب دلخواه است. اینکه هر چقدر تقریب دقیق‌تری از یک محاسبه به کار ببریم حاصل به حاصل جمع نهایی نزدیک‌تر خواهد شد. حرکت مقدار این تقریب مثلا

از دو رقم اعشار یا یک رقم اعشار، خود مصداقی از حرکت است. حرکت تقریب‌های اولیه منجر به حرکت تقریب نهایی محاسبات می‌شود و این جا به جایی است که مفهوم تابع خودش را نشان می‌دهد. زیرا یک تقریب نهایی تابعی است از تقریب‌هایی که پیش از محاسبه با آن آغاز کرده بودیم. در جمع و تفریق این تابع بسیار ساده است اما در ضرب و تقسیم رفتار این تابع پیچیده‌تر می‌شود. خوب است در بستر مفهوم خطا و کنترل خطا، تقریب محاسبات عددی در سطح متوسطه دوم بهتر مورد مطالعه قرار گیرد. تقریب زدن محاسبات مصداقی از حرکت ساختارهای جبری است. اما حرکت ساختارهای هندسی نیز موضوعی است که در کنار حرکت ساختارهای جبری مطرح می‌شود و اهمیت پیدا می‌کند. ممکن است یک شکل ساده که توسط اشکال ساده هندسی تقریب زده شده حرکت کند و متعاقبا این حرکت با یک حرکت پیوسته اشکال ساده تقریب زننده متناظر شود. البته می‌توان ساختارهای سرتاسری مانند کاشیکاری را با مبحث حرکت ساختارهای هندسی آمیخت و تبدیل و حرکت یک کاشیکاری به یک کاشیکاری دیگر را به عنوان حرکت ساختارهای هندسی در نظر گرفت. برای مثال، کاشیکاری مربعی را با حرکت مربع به سوی مستطیل‌ها به طور پیوسته به یک کاشیکاری با آجرهای مستطیلی تبدیل کرد.

۵- حرکت کاشیکاری‌ها

مبحث کاشیکاری در آموزش ریاضی دبستان و متوسطه اول بسیار مغفول مانده است. اهمیت این مبحث از این باب است که بار سنگینی که بر دوش ریاضیات کلامی و محاسباتی در آموزش ریاضی گذاشته شده است بین آموزش کلامی و تصویری تقسیم گردد. آموزش ریاضیات کاشیکاری مفاهیم هندسی بسیاری را که بر پایه اشکال ساده هندسی هستند در معرض

دید دانش‌آموزان قرار می‌دهد. مثلا اینکه یک شکل نامتناهی می‌تواند بی‌نهایت محور تقارن و یا بی‌نهایت مرکز تقارن داشته باشد و این محورها و مراکز قابل رده‌بندی باشند. یا اینکه با اشکال منتظم چه کاشیکاری‌هایی را می‌توان درست کرد و کاشیکاری‌های همگن را که در آن همه رئوس موقعیت مشابهی دارند را چگونه می‌توان رده‌بندی کرد. از اهمیت مبحث کاشیکاری که بگذریم این محتوا جایگاه مناسبی برای به اجرا گذاشتن حرکت در ساختارهای هندسی است. برای مثال یک مثلث می‌تواند به عنوان کاشی یگانه‌ای برای یک کاشیکاری سرتاسری صفحه به کار برود و حرکت مثلث در بین مثلث‌های دلخواه مصداقی از حرکت کاشیکاری خواهد بود. و یا یک چهارضلعی محدب می‌تواند به عنوان کاشی یگانه‌ای برای یک کاشیکاری سرتاسری صفحه به کار برود و حرکت چهارضلعی محدب در بین چهارضلعی‌های محدب مصداق دیگری از حرکت یک کاشیکاری است. مثلا این سؤال که کاشیکاری‌های همگن با اشکال منتظم با تغییر شکل این اشکال به چه کاشیکاری‌های دیگری قابل تبدیل هستند سوالی مربوط به حرکت ساختارهای هندسی است که می‌تواند در موازات حرکت ساختارهای جبری و محاسباتی مطرح شود. مسئله حرکت اشکال هندسی در ذات احکام هندسی است، مثلا اینکه احکام هندسی در قضایای هندسه برای خانواده‌ای از اشکال که در فرضیات مسئله صدق می‌کنند برقرارند، یکی از مراتب شناختی حل مسئله در هندسه است که برخی از دانش‌آموزان دبیرستانی خود به خود به این سطح می‌رسند.

۶- درستی احکام هندسی در عین حرکت اشکال آنها

شاید یکی از اولین قضایای هندسه قضایای همرسی باشد از جمله همرسی میانه‌ها، نیم‌سازها، عمودمنصف‌ها و مباحث همسایگی آن که برای مثلث دلخواه برقرارند. می‌توان یک مثلث در حال حرکت را در نظر گرفت و مطالعه کرد که چگونه حرکت میانه‌ها، نیم‌سازها و عمودمنصف‌ها به گونه‌ای است که همرسی این خطوط با حرکت مثلث صدمه نمی‌خورد. یا یکی از مهمترین قضایای هندسه قضیه فیثاغورس است. می‌توان یک مثلث قائم الزاویه را در بین مثلث‌های قائم الزاویه حرکت داد و بررسی کرد که چگونه حکم قضیه فیثاغورس دست نخورده باقی می‌ماند. در پایان این مقاله اثباتی از قضیه فیثاغورس که با همین دیدگاه نسبت به حرکت مثلث بدست آمده است مطرح خواهیم نمود. در نگاه سنتی به هندسه اشکال قضایای هندسه را اشکالی صلب فرض می‌کنند اما پس از رشد پختگی دانش‌آموزان، ایشان به سطحی از مهارت درک اشکال هندسی می‌رسند که می‌توانند تصور کنند که در عین برقراری فرضیات مسئله، شکل هندسی حرکت کند و در تمام لحظات این حرکت حکم مسئله نیز برقرار باشد. بسیاری اوقات با همین حرکت‌ها می‌توان یک حکم هندسی را اثبات کرد. برای مثال، همرسی میانه‌ها برای یک مثلث متساوی الاضلاع بدیهی است. چرا که این همرسی در مرکز تقارن مثلث متساوی الاضلاع برقرار می‌شود. اما می‌توان در چند مرحله یک مثلث متساوی الاضلاع را حرکت داد و همرسی میانه‌های مثلث جدید را از همرسی میانه‌های مثلث متساوی الاضلاع نتیجه گرفت و با این حرکت‌ها مثلثی دلخواه را بوجود آورد و ثابت کرد میانه‌ها در مثلث دلخواه همرس هستند. برای این کار تنها کاربرد قضیه تالس و عکس آن مورد نیاز خواهد بود. به همین روش می‌توان بسیاری از مسائل هندسه را به کمک حرکت اشکال اولیه حل کرد یا برای حل آنها به پیشنهاداتی سازنده رسید.

۷- حل مسئله هندسه به کمک حرکت

حرکت شکل مسئله در عین برقراری فرضیات مسئله نیاز به تخیلی بسیار قوی دارد. اما نرم‌افزارها می‌توانند در انجام این تصورات بسیار مفید واقع شوند. نرم‌افزار Geogebra برای اثبات قضایای هندسی مقدماتی و رسم شکل آنها و حرکت پیوسته شکل اصلی همزمان با برقراری فرضیات مسئله بسیار مناسب است. برای مثال می‌توان دایره محیطی یک مثلث را رسم کرد و این کار را چنان انجام داد که با تغییر مثلث اولیه، مثلا با حرکت یک راس، دایره محیطی اولیه همواره چنان حرکت کند که دایره محیطی مثلث‌های تغییر یافته باقی بماند. با این روش بسیاری از قضایای هندسه را می‌توان با کشیدن یک شکل دقیق در این نرم‌افزار با حرکت اشکال هندسی درست آزمایی کرد. برای مثال میانه‌های یک مثلث را رسم کرد و با تغییر و حرکت دادن مثلث دید که آیا همواره میانه‌ها همرس می‌مانند یا خیر. بسیاری از خطوط اضافه مناسب و مثلث‌های متشابه که در اثبات قضایای هندسه نقش ایفا می‌کنند با کمک همین حقه رسم شکل دقیق و حرکت اشکال هندسی قابل شناسایی هستند. نکته دیگری که در حرکت اشکال هندسه اهمیت پیدا می‌کند حالات حدی است. این که احکام هندسی در حالات حدی به چه احکام هندسی جدیدی تبدیل می‌شوند. مثلا یک حکم در مورد یک چهارضلعی محاطی وقتی دو رأس چهارضلعی به سوی هم میل می‌کنند و چهارضلعی تبدیل به یک مثلث می‌شود آیا یک حکم بدیهی خواهد بود و یا نیازمند اثبات است. و اگر اثبات آن ساده‌تر باشد چگونه اثبات این حالت حدی به اثبات حالت دلخواه کمک خواهد کرد. این کمک می‌تواند کمک منطقی یا کمک فلسفی باشد. منظور از کمک فلسفی این است که شاید اثبات حکم در حالت کلی با اثبات آن در حالت حدی مشابهت‌هایی داشته باشند که

کارگشا باشند. دانش‌آموزانی که احکام را برای اشکال صلب درنظر می‌گیرند به حالت‌های حدی توجه نمی‌کنند.

۸- حالات حدی احکام هندسی

بررسی احکام و قضایای هندسی در حالات حدی بسیار روش جالبی است که یکی از روش‌هایی است که از متد حرکت در اشکال هندسی نتیجه می‌شود. یک مثال جالب قضیه‌ای است که توسط kevin Fu دانش‌آموز دبیرستانی چینی آمریکائیم پیدا شد. او سعی می‌کرد قضایای هندسی را در حالت‌های حدی بررسی کند. برای مثال اگر یک رأس مثلثی به بی‌نهایت برود و در نتیجه دو ضلع آن در حالت حدی موازی شوند کدام احکام هندسی برقرار خواهند ماند. او توانست ثابت کند قضیه مورلی که در آن تثلیث زوایای مثلث دلخواه منجر به پیدا شدن یک مثلث متساوی الاضلاع در داخل مثلث دلخواه می‌شود در حالت حدی مورد نظر ما صحیح باقی می‌ماند. البته تثلیث رأسی که به بی‌نهایت رفته است را باید با تثلیث فاصله دو ضلع موازی جایگزین کرد و همچنان یک مثلث متساوی الاضلاع درون مثلث حدی بوجود خواهد آمد. این قضیه نیاز به اثبات دوباره دارد. چرا که بیشتر اثبات‌های قضیه مورلی در حالت حدی این قضیه را اثبات نمی‌کنند. به عبارت دیگر، اثبات حالت حدی به طور اتوماتیک برقرار نیست. بسیاری از مسائل تئوری‌پردازی را نیز می‌توان با کمک بررسی حالات حدی مطرح کرد. برای مثال، احکامی که

دایره محیطی مثلث در آنها اهمیت دارند برای مثلث حدی بالا چگونه تعمیم داده می‌شوند؟ به عبارت دیگر، چه شیء هندسی می‌تواند نقش دایره محیطی یک مثلث متناهی را برای مثلث نامتناهی ایفا کند. پس از بررسی می‌توان دید که جایگزین دایره محیطی برای مثلث حاوی اجتماع ۲خط است که یکی از آنها از ضلع متناهی می‌گذرد و دیگری در بی‌نهایت قرار دارد و مرکز دایره محیطی باید به طور تئوریک با تقاطع این دو خط که نقطه‌ای بخصوص در بی‌نهایت است جایگزین بشود. بنابراین حرکت اشکال هندسی می‌تواند برای آموزش تئوری‌پردازی در سطح دبیرستان به کار رود که نگاهی نو به آموزش‌پذیری تئوری‌پردازی است.

۹- تابع و حرکت

مفهوم تابع نیز از بدو مطرح شدن با مفهوم حرکت عجین و در هم تنیده بوده است.نیوتون تابع را برای مدلسازی حرکت در بستر زمان به کار برد از این رو می‌توان تابع را به صورت یک نقطه متحرک در یک فضا در نظر گرفت که در این صورت مشتق تابع همان بردار سرعت خواهد بود. بنابراین برای درک تابع در بستر مفهوم حرکت از رسم کل تابع روی محور کامل اعداد احراز کرد و تابع را در حال رسم شدن از لحظه صفر تا لحظهٔ حال در نظر گرفت. با این وصف نمودار تابع یک شکل در حال حرکت است که در حال کامل شدن و ساخته شدن است و مشتق و انتگرال تابع هم با توجه به رفتار موضعی تابع تعیین خواهد شد. البته رسم نمودار در بستر

زمان به کمک نرم‌افزار بهتر قابل نمایش است. حتی اگر امکان داشته باشد متغیر زمان توسط یک متحرک قابل کنترل با ماوس قابل جلو و عقب کردن باشد می‌توان رفتار تابع مانند صعودی و نزولی بودن، ماکزیمم و مینیمم موضعی (؟؟؟؟) و مفاهیم مربوطه را با کمک حرکت تابع و حرکت مقدار تابع بر حسب زمان با پس و پیش بردن زمان تعریف کرد. وارد شدن مفاهیم مربوط به حرکت در تعریف حد و مشتق و انتگرال هر یک به طور جداگانه اهمیت در نظر گرفتن حرکت در آموزش حسابان را به نمایش می‌گذارند. به خصوص مفهوم حد مستقیما بر اساس مفهوم حرکت قابل بیان است. تعریف مشتق تابع بر اساس مفهوم حد نیز این مفهوم را بر اساس حرکت بنیان‌گذاری می‌کند. البته این تعریف مشتق در اوایل قرن نوزدهم حدود دویست سال بعد از نیوتون برای دقیق‌تر کردن تعریف ریاضی مشتق به کار گرفته شد که تحت تاثیر آراء کوشی و وایراشتراوس انجام شد.

۰ ـ ۱مشتق تابع و حرکت

مشتق تابع به عنوان نرخ تغییر مستقیما بر مفهوم تغییر و لذا مفهوم حرکت تکیه می‌زند. بنابراین حتی قبل از فرمولبندی کوشی و وایراشتراوس در زمان نیوتن و لایبنیتز هم مفهوم مشتق به حرکت تکیه می‌زد. نرخ تغییر در واقع نسبت بین تغییرات مقدار تابع و مقدار متغیر است. از لحاظ فلسفی اینکه یک نسبت را با مقدار عددی آن یکی بگیریم بسیار حائز اهمیت است. این نکته به نقدی مربوط

می‌شود که خیام به ساختار هندسی اعداد (؟؟؟؟) مثبت که توسط اقلیدس معرفی شده بود ارائه کرد. خیام به این نکته که حاصلضرب دو طول یک مساحت است و از نوع و جنس طول نیست اعتراض کرد. او در برابر تعریف اقلیدس اعداد را به صورت نسبت در نظر گرفت و حاصلضرب نسبت‌ها را به صورت یک نسبت که خود بدون بعد است تعریف کرد. در تعریف مشتق نرخ تغییر را که یک نسبت است با مقدار یک تابع که متغیر مکان است بر هم منطبق می‌کنیم و مشتق یک تابع خود می‌تواند به عنوان یک تابع دیگر در نظر گرفته شود. در مورد انتگرال تابع هم شبیه همین مشکل وجود دارد. انتگرال تابع مقدارش یک مساحت است ولی ما آن را با مقدار یک متغیر مکان یکی می‌گیریم و با این کار انتگرال یک تابع را که نمودار آن در حال حرکت است به عنوان یک تابع از همان متغیر در نظر می‌گیریم. بنابراین اینکه انتگرال یک تابع خود یک تابع تمام عیار است بر مفهوم حرکت استوار شده است. این حرکت بسیار شبیه حرکت مساحت یک شکل در حال تغییر است. مفهوم انتگرال در ادامه تئوری مساحت بنیانگذاری می‌شود که در سطح دبستان و متوسطه اول پایه‌گذاری شده است. با این وصف حرکت در اشکال هندسی پیش‌نیاز مفهومی حرکت در حسابان خواهد بود.

۱ ـ ۱انتگرال تابع و حرکت

انتگرال تابع می‌تواند سطح زیر منحنی و همینطور حجم زیر منحنی باشد. بنابراین می‌تواند به عنوان انتگرال یک تابع دو متغیره تعریف

شود. در اینجا حرکت در دو بعد زمانی مطرح می‌شود که مجردتر از حرکت در یک بعد متغیر است. این درک از حرکت دو متغیره بسیار مجردتر از حرکت یک متغیره است که ما درک فیزیکی از آن به عنوان زمان داریم. می‌توان مثال‌های حرکت اشکال ساده هندسی را در نظر گرفت و در آنها حرکت دو متغیره یا سه متغیره را تعریف کرد. برای مثال متوازی الاضلاع با دو متغیر طول دو ضلع مجاور می‌توانند تغییر کنند و در حالت تساوی این تغییرها یک لوزی را بدست بدهند یا می‌توان در کنار دو متغیر طول یک متغیر زاویه را که نماینده زاویه بین دو ضلع است را معرفی کرد و متوازی الاضلاع‌ها را با سه پارامتر حرکت داد و به این روش همه متوازی الاضلاع‌ها را پوشاند. یک نکته ظریف دامنه تغییر متغیر زاویه است که یک دایره می‌باشد که ما را به یاد همان مثال ساعت و عقربه‌های آن می‌اندازد که عمیقا با مفهوم زاویه در هم تنیده است. ولی می‌توان دامنه متغیرها را محور اعداد یا محور دایره‌ای اعداد گرفت. یک تابع روی دایره را می‌توان تابعی متناوب روی محور اعداد درنظر گرفت و با این وصف به متغیرهای حرکت کننده روی خط بازگرداند. اما آنچه متغیرهای چند بعدی را دربر می‌گیرد فضاهای پیچیده‌تر از فضاهایی است که فضای پوشش آنها فضای تخت اقلیدسی باشد و از اینجا راه برای در نظر گرفتن نظریه توابع روی فضاهای دلخواه و مشتق و انتگرال آنها باز می‌شود که ریاضیات آن به حسابان بالاتر از سطح ریاضیات مدرسه مربوط می‌شود. ارتباط مشتق و انتگرال نیز در قضیه اساسی حسابان دیده

می‌شود که در آنجا هم مفهوم حرکت وارد می‌شود. چرا که تغییر مساحت زیر منحنی را در تناظر با تغییر شیب تابع قرار می‌دهد.

۲ ـ۱قضیه اساسی حسابان و حرکت

اثباتی از قضیه فیثاغورس با کمک روش بی‌نهایت کوچک‌های نیوتن قابل فرمولبندی است که اولین بار آن را در سایت ویکیپدیا دیدم و سپس آن را برای تعمیم سه بعدی قضیه فیثاغورس به کار بردم و دو اثبات مختلف از آن را در سه بعد بدست آوردم. اثبات اولیه این چنین است که اگر اضلاع زاویه قائمه x و b باشند و قاعده آن y باشد با تغییر ضلع x به اندازه dx مثلثی بی‌نهایت کوچک و متشابه با مثلث قائم الزاویه اولیه بدست می‌آید که نتیجه می‌دهد تساوی زیر برقرار است.

$$dy/dx = x/y$$

از اینجا داریم $ydy = xdx$ و با انتگرال‌گیری بدست می‌آید که $y^2 = x^2 + C$ که با در نظر گرفتن حالت $x = 0$ بدست می‌آید که $C = b^2$. بنابراین در مثلث قائم الزاویه داریم $x^2 + b^2 = y^2$ که همان چیزی است که قضیه فیثاغورس حکم می‌کند. این که این قضیه واقعا از قضیه اساسی حسابان وام می‌گیرد موضوع یک بحث فلسفی است اما نکته ما این است که با کمک حسابان و با کمک هندسه اقلیدسی مثال‌های بی‌نهایت کوچک قضیه فیثاغورس ثابت شده است. گویا نیوتن در کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی خود بسیاری از مثال‌های هندسه اقلیدسی مثلث‌های بی‌نهایت کوچک

مانند بالا را به کار برده است. چرا که روش حسابان هنگام تألیف این کتاب هنوز گسترش پیدا نکرده بود. مثال‌های از استدلال‌های نیوتن را می‌توان در کتاب "حسابان سال دوم" نوشته David Bressoud پیدا کرد.