تئوری‌پردازی در دبیرستان

آرش رستگار

اشاره

در این مقاله تحقیقی از یک دانش‌آموز چینی ـ آمریکایی ارائه می‌شود که در سطح دبیرستان موفق به تئوری‌پردازی شده است و در مورد امکان تئوری‌پردازی در سطح ریاضیات مدرسه‌ای صحبت خواهد شد.

مقدمه

عموماً ریاضیاتی که دانش‌آموزان دبیرستان با آن سروکار دارند، ریاضیات محاسباتی است و ریاضیاتی که دانشجویان دورهٔ کارشناسی با آن روبه‌رو هستند، به‌طور معمول از نوع حل مسئله است. هرچند برخی از دانش‌آموزان دبیرستان، به‌خصوص به بهانهٔ المپیاد، به این سطح خواهند رسید. در دوره‌های بالاتر، مثل کارشناسی ارشد و دکترا، انجام ریاضیات عموماً به‌صورت اثبات قضیه ظاهر می‌شود و در دوره‌های بالاتر، ریاضی‌دانان مشهور کم‌کم شروع به تئوری‌پردازی و گسترش تئوری خود می‌کنند.

ریاضی‌دانان کمی بوده‌اند که قبل از رسیدن به دورهٔ پیش از دانشگاه (زیر ۲۰ سال) موفق به تئوری‌پردازی شده‌اند. ریاضی‌دانان بزرگی همچون **گاوس** و **نیوتون** نتوانستند به چنین سطحی برسند. حتی برخی ریاضی‌دانان مشهور هم‌عصر ما، با وجود گرفتن دکترا پیش از ۲۰ سالگی، همچنان به پختگی لازم برای تئوری‌پردازی نرسیده‌اند. **آبل** و **گالوا** دو ریاضی‌دان هستند که با وجود اینکه هر دو توانسته‌اند جواب یک سؤال مشترک را بدهند، با این حال تفاوت زیادی در کار این دو دیده می‌شود. گالوا توانست از دل این راه‌حل، قضیه‌ها و مسئله‌هایی بیرون بکشد که به تئوری جدیدی منجر شد. درحالی‌که آبل با وجود برخورد با ریاضیات مشابه نتوانست این تئوری را بیرون بکشد.

در این مقاله تأکید داریم که مهارت‌های تئوری‌پردازی قابل‌آموزش‌اند. **کوین فو**، دانش‌آموز چینی ـ آمریکایی که در سطح دبیرستان موفق به تئوری‌پردازی شده است، در مورد امکان تئوری‌پردازی در سطح ریاضیات مدرسه‌ای به ما نوید می‌دهد. او مثلث‌های حدی در صفحهٔ اقلیدسی دوبعدی و نتایجی از آن‌ها را در قضایایی مهم از هندسهٔ اقلیدسی در نظر گرفته است. خیلی از این حالات حدی بر قضایای بدیهی یا استاندارد متمرکز هستند. اما به ویژه، در مورد یک حالت حدی از «قضیهٔ مورلی» بحث شده است که به نظر مهم و جدید می‌رسد. هدف دیگر او نگاهی به وضعیت قضایایی برای هرم‌های حدی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی است. در اینجا متن مقالهٔ او آمده است و نکاتی دربارهٔ آموزش تئوری‌پردازی به آن اضافه شده است.

قضیهٔ مورلی در حالت حدی

کوین فو

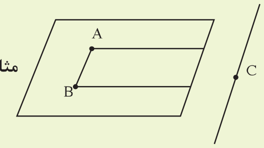
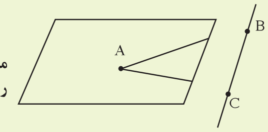
قضیهٔ مورلی بیان می‌کند که وصل کردن تثلیث‌گرهای زاویه‌های مجاور در یک مثلث، به سه نقطه منجر می‌شود که تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌دهند. این مسئله برای تمام مثلث‌ها در صفحهٔ دکارتی دوبعدی درست است. با وجود این، قضیهٔ مورلی برای مثلث‌های حدی نیز برقرار

است. این حالت از اثبات حالت مثلث معمولی نتیجه نمی‌شود و نیازمند اثباتی جدید است. هدف این پروژه، اثبات نسخهٔ حدی قضیهٔ مورلی و چند حالت حدی دیگر از نتایج مشهور هندسهٔ اقلیدسی، مثل مشابه‌سازی دایرهٔ نه نقطه و حالت‌های حدی جدیدی است که ما باید برای مشابه‌سازی درست مفهوم دایرهٔ محیطی بیابیم. علاوه بر آن می‌توان این حالت‌ها را برای چهاروجهی به چهاروجهی‌های حدی نیز انجام داد که به‌علت طولانی شدن مقاله بیان نکرده‌ایم.

حالت فضای دوبعدی اقلیدسی از طریق مطالعهٔ مثلث‌های حدی و دایره‌هایی که بعضی از آن‌ها به بی‌نهایت منتقل می‌شوند، بررسی می‌شود و کاربرد آن‌ها در برخی قضیه‌های مشهور را خواهیم دید. یک مثال مهم در این باب قضیهٔ مورلی است که در چندین حالت حدی دوبعدی اثبات شده است. استفاده از تصویر پیچیدگی حالت‌های حدی جدید را کم و در برخی موارد اثبات آن‌ها را تأیید می‌کند. نتایج تمام موارد جدید حدی به‌دست آمده است، خواه در صفحهٔ دوبعدی اقلیدس و خواه در فضای سه‌بعدی اقلیدس باشد. در مجموع، این نتایج برای تحقیقات آیندهٔ ریاضی حول قضایای مطرح‌شده اهمیت دارند، زیرا کاربرد چنین قضیه‌هایی در شبیه‌سازی‌ها بسیار پیچیده‌تر در هندسه، فرصت‌هایی برای استفاده از این قضیه‌ها در سناریوهای بسیار پیچیده‌تر فراهم می‌کند و روش بردن یک شیء به بی‌نهایت می‌تواند در جنبه‌های متفاوتی از هندسه به‌کار برده شود.

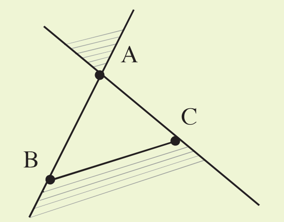
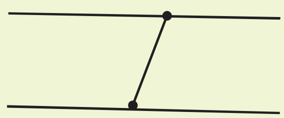
حالت‌های دوبعدی

حالت‌های حدی مثلث‌ها: می‌خواهیم برای مثلث‌ها در حالت حدی هندسه انجام دهیم.

	Lv مثلثی با دو ضلع موازی و رأسی در بی‌نهایت
	Le مثلثی که یک ضلعش مـــوازی با یک راستای خاص به بی‌نهایت می‌رود

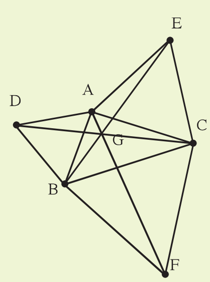
مثلث خارجی

با در نظر داشتن حالت Iv و اثبات آنالوگ‌هایی از قضایای استاندارد در این حالت حدی و این حقیقت که مثلث خارجی یک مثلث Iv، دوباره Iv اســـت، ما را به این حقیقت رهنمون می‌کند که مثلث خارجی یک مثلث متناهی که خود یک شیء نامتناهی است، می‌تواند به‌عنوان آنالوگی از مثلث متناهی در نظر گرفته شـــود و ما انتظار داریم که آنالوگ‌هایی از قضایای هندسهٔ اقلیدسی برای آن‌ها برقرار باشد.

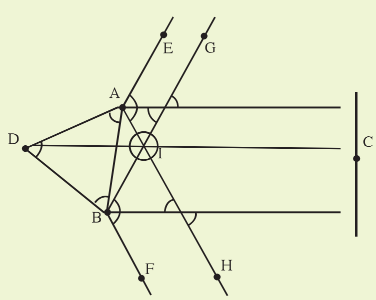
	مثلث خارجی در حالت متناهی
	مثلث خارجی در حالت I_V

نتایج مهم از هندسه برای مثلث‌های حدی

قضیهٔ فرما: سه مثلث متساوی‌الاضلاع روی ضلع‌های یک مثلث دلخواه بسازید. اگر هر رأس از مثلث اولیه را به دورترین نقطهٔ مثلث تشکیل‌شده بر ضلع روبه‌روی آن رأس وصل کنید، به خط‌های همرس منجر می‌شوند.



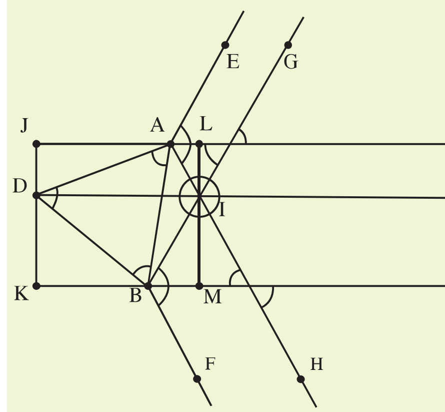
شکل ۱



قضیهٔ فرما بـــرای Iv: ABC یک مثلـــث Iv نامتناهی اســـت کـــه رأس C آن در خطی در بی‌نهایت اســـت. مثلث متســـاوی‌الاضلاع ABD را بـــر ضلع AB بســـازید و F و E را طـــوری قرار دهید کـــه: $\angle EAC=\angle FBC=60^\circ$. فرض کنید: $BG\|AE$، $AH\|DF$ و $AC\|DC\|BC$. تحت این شـــرایط DC، BG، و AH همرس هستند.

در اینجا، این سه خط به این مفهوم جدید موازی هستند که در آن یک خط در بی‌نهایت با استفاده از یک نقطهٔ متناهی و یک نقطهٔ نامتناهی تعریف شـده اسـت. جهت خط توسط نقطهٔ نامتناهی C و خط دقیق توسط یکی از نقطه‌های متناهی مشخص می‌شود.

اثبات (حالت Lv): می‌دانیم $\angle EAC$ و $\angle FBC$ برابر ۶۰° و ΔABD یک مثلث متسـاوی‌الاضلاع با ضلع ۱ است. هدف این اسـت که نشان دهیم فاصلهٔ D و I از خط KC برابر است کـه اینجا I محل برخورد دو خط AH و BG اسـت. لذا باید نشان دهیم موقعیت عمودی نقطه‌های D و I یکی است، زیرا در این صورت خط افقی DC و IC منطبق می‌شوند.

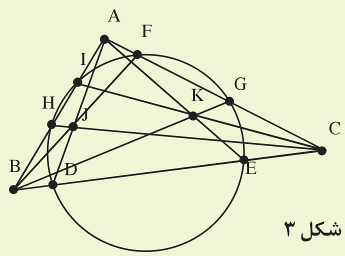


شکل ۲

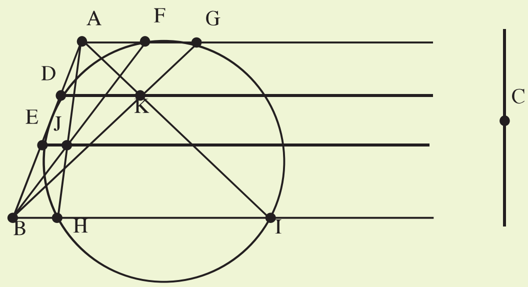
چند نقطه به شـکل اضافه شـده است، به طوری که JK خط عمودی است که از D می‌گذرد و LM خط عمودی است که از I می‌گذرد. در نتیجه زاویه‌های قائمهٔ DJA ،ALI ،IMB و BKD سـاخته می‌شـوند. به خاطر قضیهٔ خط‌های موازی، $\angle IAC$ و $\angle IBC$ برابر ۶۰° هسـتند. با تفریق زوایای مناسب داریم: $\angle AIL$ و $\angle BIM$ برابر ۳۰° و $\angle AIB$ برابر ۱۲۰° است. فرض کنیـد $\angle DBK$ زاویه‌ای x° باشـد. DK، ارتفاع مثلث، برابـر با $\sin(x)$ اسـت. فرض کنید طـول AI برابر y و طول BI برابر z باشـد. چـون: $\angle BIM=۳۰^\circ$ و $\angle IBM=۶۰^\circ$، پس: $IM=\sqrt{۳}/۲BI=z\sqrt{۳}/۲$.

عـلاوه بـر ایـن، چـون: $\angle IBM=۶۰^\circ$ و $\angle DBK+\angle ABD+\angle ABI+\angle IBM=۱۸۰^\circ$ می‌تـوان نتیجه گرفت که: $\angle ABI=(۶۰-x)^\circ$. به کمک تفریق همچنین می‌توان گفت: $\angle BAI=x^\circ$. حال طبق قضیهٔ سینوس‌ها خواهیم داشت: $y/\sin(۶۰-x)=z/\sin(x)=۱/(\sin۱۲۰)$. پـس می‌توان نتیجه گرفـت: $\sin(x)=z\sin(۱۲۰)$ و چون $\sin(۱۲۰)=\sqrt{۳}/۲$، پس: $\sin(x)=z\sqrt{۳}/۲$. سمت چپ تساوی اخیر برابر با DK و سمت راست برابر با IM است، پس DK و IM با یکدیگر برابرند. این نشان می‌دهد که خط‌های افقی DC و IC منطبق می‌شوند و نتیجه می‌گیریم سه خط DC ،BG و AH همرسند.

قضیه: برای ΔABC ترکیب‌شده با دایره‌ای که اضلاع BC را در D و AC ،E را در F و G، و AB را در H و I قطع می‌کند، اگر BF ،AD و CH همرس باشـند، در این‌صورت BG ،AE و CI نیز همرس خواهند بود.



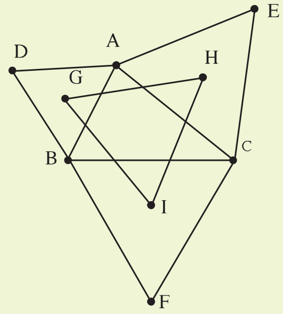
شکل ۳



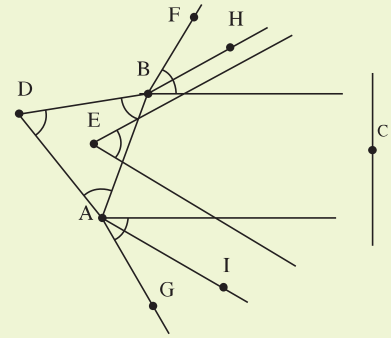
شکل ۴

قضیهٔ سـوای دوگانه برای Lv: در یک مثلث Lv ی ΔABC، رأس C در بی‌نهایت اسـت. یک دایره شـش بار با ΔABC، همانطور که در شـکل نشان داده شده است، دو بار در هـر ضلع، برخورد می‌کند. خطهـا از هر نقطه که دایره با ضلع مثلث متقاطع است، به رأس مقابلش رسم شده‌اند. نتیجهٔ پایانی این اسـت که BG ،AI و CD در K همرسند، اگر BF، AH، و CE در J همرس باشند.

قضیهٔ ناپلئون: برای هر مثلـث، اگر بیرون هر ضلع آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع بسازیم، مرکز این مثلث‌های جدید تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند.



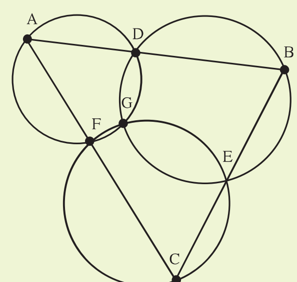
شکل ۵



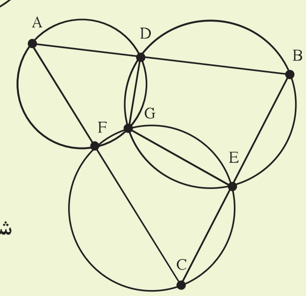
شکل ۶

قضیهٔ ناپلئون برای Lv: نقطهٔ C از ΔABC در بی‌نهایت است. ΔABD مثلثی متساوی‌الاضلاع است. BF و AG طوری ساخته شده‌اند که $\angle FBC$ و $\angle GAC$ ۶۰° هستند. BH نیم‌ساز زاویهٔ $\angle FBC$ و AI نیم‌ساز زاویهٔ $\angle GAC$ است. از مرکز مثلث ΔABD که آن را E می‌نامیم دو خط موازی BH و AI اخراج می‌کنیم. $\angle E$ با توجه به نحوهٔ ساختش ۶۰° است و نقطه‌های E و بی‌نهایت روی پرتوهایی که از E هستند، یک مثلث متساوی‌الاضلاع نامتناهی شکل می‌دهند.

قضیهٔ همرسی دایره‌ها: برای هر نقطهٔ دلخواه D بر AB، E بر BC، و F بر AC، دایره‌های محاطی DBE، FAD و ECF در نقطه‌ای مانند G همرس خواهند بود.



شکل ۷

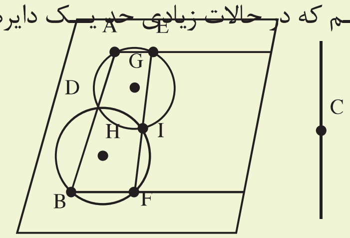


شکل ۸

قضیهٔ همرسی دایره‌ها برای Lv: مثلث ABC یک مثلث Lv با نقطهٔ C در بی‌نهایت است. (شکل ۹). برای نقطهٔ D بر AB، E بر AC و F بر BC دایره‌های محاطی DAE و DBF در نقطه‌ای مانند I که روی EF قرار دارد، همرسی‌اند.

سومین دایرهٔ محیطی که دایرهٔ محیطی مثلث Lvای ECF است، متشکل از دو خط EF و خطی در بی‌نهایت، محل برخورد معمولی هر سه دایرهٔ محیطی در نقطهٔ I قرار دارد.

می‌دانیم که در حالات زیادی حد یک دایره یک خط

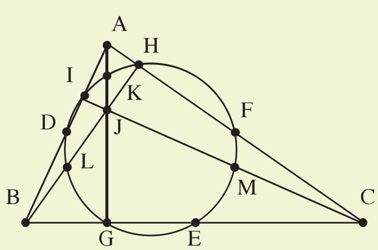


شکل ۹

می‌شود که مرکز آن در بی‌نهایت است. اما اینجا یک مشکل وجوددارد: اگر EIF خطی است که دایره شده، پس چرا C روی آن نیست؟ (همرسی دوایر محیطی) برای حل این تناقض، پیشنهاد این است که بگوییم: دایره یک موجود درجهٔ دو است. در نتیجه برای مشابه آن می‌توان خط EF اجتماع خط بی‌نهایت را بگذاریم که مثل دایره معادله‌ای درجهٔ دو دارد و هم از سه نقطهٔ رأس EFC می‌گذرد. سهمی بیضی و هذلولی مقاط مخروطی ناتکین هستند. اما باید در نظر داشت مقاطع مخروطی دیگری نیز وجود دارند. مثلاً خط‌های متقاطع و یا یک خط دوگانه نیز مقاطعی مخروطی هستند. اگر به جای مخروط یک استوانه قرار دهیم، دو خط موازی نیز می‌توانند مقاطعی مخروطی باشند، ولی همچنان ناتکین خواهند بود. هرچند اکثراً به این مقاطع اشاره نمی‌شود، ولی باید آن‌ها را در رده‌بندی فرما که برای خم‌های درجهٔ دو است، در نظر گرفت.

مشابه خط اویلر و دایرهٔ ۹ نقطه

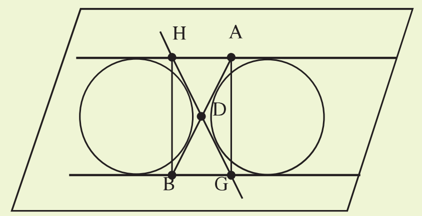
قضیهٔ دایرهٔ ۹ نقطه: نقطه‌های وسط اضلاع مثلث، پای ارتفاع‌ها و وسط‌های پاره‌خط‌هایی که از هر رأس به مرکز ارتفاعی مثلث کشیده شده‌اند، همگی هم‌دایره هستند و به این دایره، دایرهٔ ۹ نقطه می‌گوییم.



شکل ۱۰

قضیهٔ دایرهٔ ۹ نقطه برای Lv: فرض کنید ΔABC یک مثلث Lv با رأس C در بی‌نهایت باشد. ارتفاع‌های AG و BH به دو خط عمودی تبدیل می‌شوند. D همچنان وسط پاره‌خط متناهی AB است. مرکز ارتفاعی و بقیهٔ نقاط روی دایرهٔ ۹ نقطهٔ اولیه به بی‌نهایت می‌روند؛ از جمله نقطهٔ I از ارتفاع CI که در بی‌نهایت به خط تبدیل می‌شود. خط HG و

خط بی‌نهایت مشـــابه دایرهٔ ۹ نقطه را می‌سازند، به‌طوری که مرکز دایره ۹ نقطهٔ اولیه به محل برخورد HG و خط بی‌نهایت تبدیل می‌شود.

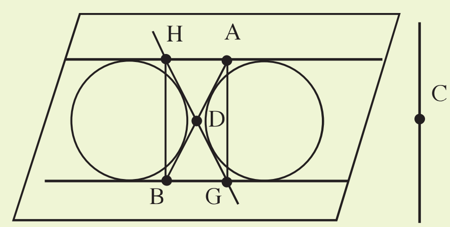


شکل ۱۱

قضیهٔ خطر اویلر: برای هر مثلث غیرمتســـاوی‌الاضلاع، مرکز ثقل مثلث، مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ ۹ نقطهٔ آن روی خطی به اسم «خط اویلر» قرار دارند.

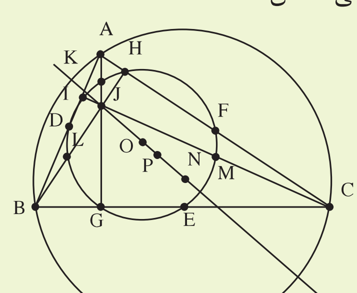
قضیهٔ خط اویلر برای Lv: وقتی C از ΔABC به بی‌نهایت می‌رود، مرکز ثقل، مرکز ارتفاعی، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ ۹ نقطهٔ مثلث ΔABC همه روی خط بی‌نهایت هستند.

مرکز ثقل در نقطهٔ C اســت. مرکز ارتفاعی محل برخورد AG ،HB و خط بی‌نهایت است که چون آن دو موازی‌اند، پس محــل برخورد آن‌ها در بی‌نهایت اســت. مرکز دایرهٔ محیطی محل برخورد پاره‌خط AB و خط بی‌نهایت اســت. مرکز دایرهٔ ۹ نقطه محل برخورد پاره‌خط HG و خط بی‌نهایت است. این نشان می‌دهد خط اویلر همان خط بی‌نهایت است.

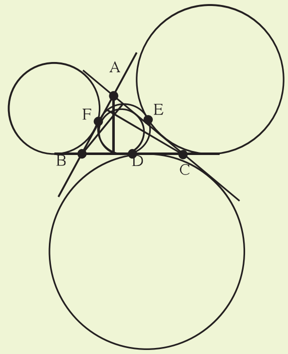


شکل ۱۳

قضیـــهٔ فوئـــر بـــاخ: دایـــرهٔ ۹ نقطـــهٔ یـــک مثلث غیرمتســـاوی‌الاضلاع بر دایره‌های محاطـــی خارجی و دایرهٔ محاطی داخلی مماس است.

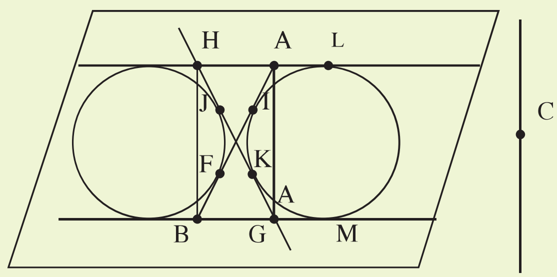


شکل ۱۲



شکل ۱۴

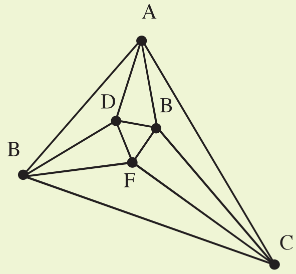
شکل ۱۵



قضیهٔ فوئر باخ برای Lv: در ΔABC نقطهٔ C در بی‌نهایت اســت. دایرهٔ محاطی خارجی مماس بــر AB ،AB را در F، و دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC را در L ،I و M قطع می‌کند. دو دایرهٔ محاطی خارجی دیگر در بی‌نهایت هســـتند. چون آن‌ها به ترتیب بــر AC و BC در E و D مماس‌اند که در بی‌نهایت قرار دارند. خط HG و خط بی‌نهایت مشـــابه بی‌نهایت دایرهٔ ۹ نقطه را می‌سازند. تحت این شرایط، دایرهٔ جدیدی که توسط HG و خــط بی‌نهایت تعیین می‌شــود، باید به دایرهٔ محاطی و دایره‌های محاطی خارجی ΔABC مماس باشــد. دایره‌های محاطی خارجی که با AC در E و با BC در D مماس هستند، ناپدید می‌شوند.

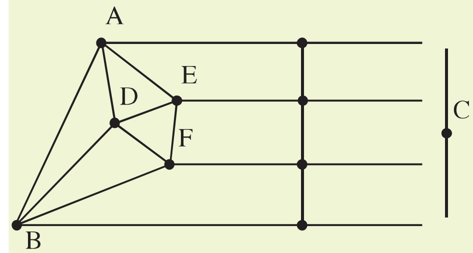
قضیهٔ مورلی در حالت حدی دوبعدی

قضیه مورلی: برای هر مثلث، ســه نقطــه‌ای که در آن تثلیث‌گرهــای زاویه‌های همســـایه با هم برخــورد می‌کنند، همان‌طور که در شـــکل ۱۶ نمایش داده شده است، تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند.

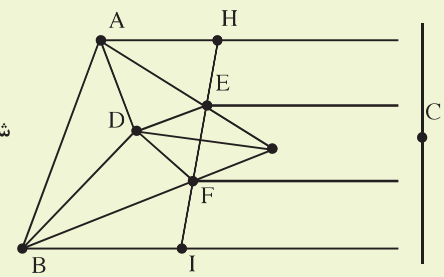


شکل ۱۶

Lv مورلی: رأس C از ΔABC به بی‌نهایت می‌رود و زاویهٔ تثلیث‌شدهٔ C توسط سه خط هم‌فاصله که به بی‌نهایت می‌روند، تعیین می‌شود. D محل برخورد تثلیث‌گر زاویه‌های A و B، E محل برخورد تثلیث‌گر زاویه‌های A و C، و F محل برخورد تثلیث‌گر زاویه‌های B و C هستند. با وصل کردن سه نقطهٔ D، E و F یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.



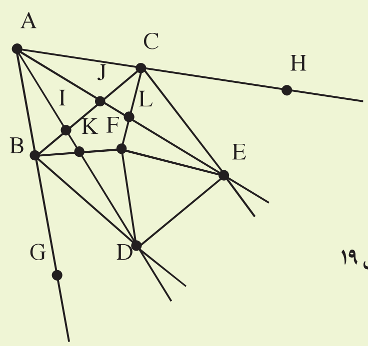
شکل ۱۷



شکل ۱۸

اثبات Lv مورلی از داود وکیلی: AH با BI موازی است، اما AB با HI موازی نیست. تثلیث کردن زاویه‌های HAB و IBA باعث تثلیث زاویه‌های HAB و IBA می‌شود که در D و G متقاطع‌اند. HI، AG را در E قطع می‌کند و BG را در F. حال می‌دانیم: $\angle HAE=\angle EAD=\angle DAB=x^\circ$ و $\angle IBF=\angle FBD=\angle DBA=y^\circ$، $\angle HAB$ و $\angle IBA$ مکمل‌اند، پس: $۳x+۳y=۱۸۰^\circ$. حال چون همهٔ مثلث‌ها مرکز دایرهٔ محاطی دارند (محل برخورد نیمساز زاویه‌های مثلث)، از آنجا که $\angle GAB$ و $\angle GBA$ توسط DA و DB نصف شده‌اند، پس DG نیمساز $\angle AGB$ است. برای ΔABC می‌دانیم: $\angle GAB+\angle GBA+\angle AGB=۱۸۰^\circ$ که یعنی: $۲x+۲y+\angle AGB=۱۸۰^\circ$. حال می‌توان از $۳x+۳y=۱۸۰^\circ$ نتیجه گرفت: $۲x+۲y=۱۲۰^\circ$. پس: $\angle AGB=۶۰^\circ$ و DG نیمساز آن است. لذا: $\angle EGD=\angle FGD=۳۰^\circ$، DE و DF طوری ساخته شده‌اند که: $\angle GDE=\angle GDF=۳۰^\circ$، ولی همچنین آن‌ها توسط محل برخورد AG، BG و HI تعیین می‌شوند.

برای اینکه این فرضیات را توضیح دهیم، نتایج باید به ما بگویند DEF مثلثی متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه باید از این فرض استفاده نشده در Lv مورلی که HE=EF=FI استفاده کنیم. زاویه‌های روبه‌روی چهارضلعی DEGF هر دو نصف شده‌اند، در نتیجه این چهارضلعی یک کایت است و EF بر DG عمود است. پس: $\angle GEF=\angle GFE=\angle DEF=\angle DFE=۶۰^\circ$. اکنون می‌توان گفت: ΔDEF و ΔEFG متساوی‌الاضلاع هستند. چون $\angle GEF$ و $\angle GFE$، ۶۰° هستند و توسط همان خطی که $\angle HEA$ و $\angle IFB$ را ساخته است ساخته شده‌اند، پس: $\angle HEA=\angle IFB=۶۰^\circ$. علاوه بر این داریم: $\angle HEA+\angle AED+\angle DEF=۱۸۰^\circ$ و $\angle IFB+\angle BFD+\angle DFE=۱۸۰^\circ$. پس: $\angle AED=۶۰^\circ$ و $\angle BFD=۶۰^\circ$. به کمک هم‌نهشتی زاویه ـ ضلع ـ زاویه، ΔHEA با ΔDEA هم‌نهشت است و ΔIFB با ΔDFB هم‌نهشت است. در نتیجه: HE=ED و IF=FD. حتی بیشتر از آن می‌توان نتیجه گرفت: ED=DF=EF. چون ΔDEF مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس: HE=EF=FI. این وجود سه فاصلهٔ مساوی میان سه خطی که تا بی‌نهایت رفته‌اند را در مورلی Lv نتیجه می‌دهد. تمام شروط برقرارند و هیچ تناقضی میان آن‌ها حاصل نشده است. بنابراین Lv مورلی درست است.



شکل ۱۹

مورلی خارجی: برای ΔABC، $\angle BAC$ توسط AD و AE تثلیث شده است. به جای $\angle ABC$ و $\angle ACB$ (که تثلیث نشده‌اند) زاویه‌های مکمل آن‌ها تثلیث شده‌اند که در آن BF و BD تثلیث‌گرهای $\angle CBG$، CF و CE تثلیث‌گرهای $\angle BCH$ هستند. در این شرایط DEF باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

مورلی خارجی در حالت حدی دقیقاً همانند قضیهٔ مورلی معمولی در حالت حدی است. مورلی خارجی با مثلث خارجی که در آن طول حقیقی خط AC یک عدد منفی است، شباهت دارد. این در واقع مکمل طول قسمت AC است و مساحت مثلث نامتناهی برابر با نصف ارتفاع در طول حقیقی است که مساحتی منفی به‌دست می‌دهد. این فرضیات سازگارند. به این معنا که به تناقض منجر نمی‌شوند و به‌عنوان توسعه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.