

ریاضیات کاربردی

بد ریاضیاتی است*

پال هالموس

ترجمه محمدرضا بهاری

مقادیر - اشکال بسیار نامشخصتر از تقسیم بندی محض - کاربردی است، و خیلی کمتر هم تفرقه برانگیز است.

هیچ کس مجبور نیست که یکبار برای همیشه، بین بستنی وانیلی و بستنی شکلاتی یکی را انتخاب کند، حتی می تواند مخلوطی از هر دو را دوست داشته باشد، اما اکثر مردم همیشه یک جور بستنی را سفارش می دهند. در مورد ریاضیدانها هم اختلاف سلیقه (مادر زادی؟) مشابهی وجود دارد. هیچ ریاضیدانی مجبور نیست یکبار برای همیشه تصمیم بگیرد که فقط جبر (گسسته) یا فقط توپولوژی (پیوسته) را دوست داشته باشد، و حتی مختار است به موضوعات جدید و در حال رشدی مثل توپولوژی جبری و جبر توپولوژیک بپردازد، اما اغلب ریاضیدانها در واقع با طرفدار گسسته اند یا طرفدار پیوسته.

مربع و کره

خیلی بد است که این همه درباره ریاضیات و بخشهای آن صحبت کنیم بی آنکه چند مثال خوب و ملموس ارائه کرده باشیم، اما نمونه های واقعی خیلی فنی تر از آن اند که بشود در این بحث مطرحشان کرد. پس فعلا یکی دو مثال ساختگی (با بعضی نقائصی که بزودی توضیحشان خواهم داد) ارائه می کنم.

فرض کنید بخواهیم اتاقی را که کف آن کاملاً به شکل مربع است با آجرهایی که خودشان هم به شکل مربع اند ولی ابعاد هیچ دو تایی از آنها یکی نیست آجرفروش کنیم. آیا این کار شدنی است؟ به عبارت دیگر، آیا می شود یک مربع را با تعداد معینی مربعهای کوچکتر که ابعاد همه شان با هم فرق می کند کاملاً پوشاند بی آنکه هیچ یک از آنها روی دیگری قرار بگیرد؟ جوابش آسان نیست.

این هم یک مسأله دیگر: کره کاملی (مثل یک توپ بسکتبال) را در نظر بگیرید. می خواهیم بینیم روی این کره حداقل چند تا نقطه می توان مشخص کرد به طوری که هر نقطه ای از سطح کره در محدوده یک اینجی یکی از نقاط مشخص شده واقع باشد؟ به عبارت دیگر، با صرفه ترین نحوه توزیع ایستگاههای تقویت تلویزیون در سطح کره زمین کدام است؟

آیا مثال مربع درباره مقادیر است یا درباره اشکال؟ ظاهر آ جواب این است که در باره هر دو؛ مثال کره هم همین طور. این مثالها به یک لحاظ نمونه های خوبی اند، چون در واقع موارد «مخلوط» محتملتر (و جالبتر) از مواردی اند که درست در یکی از تقسیم بندیها بگنجد. در هر صورت، این دو مسأله خصوصیاتشان مختلف است. مسأله مربع بیشتر از نوع حسابی، گسسته، منتهی، و محض است؛ مسأله کره بیشتر با طبقه بندیهای هندسی، پیوسته، نامتناهی، و کاربردی جور در می آید.

مسأله مربع به هر حال جالب توجه است و مقالاتی هم درباره آن نوشته شده، اما واقف این است که اکثر ریاضیدانها برای آن ارزش زیادی قائل نیستند. نه به این دلیل که این مسأله (از لحاظ کاربردی) «به درد نخور» است، بلکه به این خاطر که خیلی خاص (کم اهمیت؟ کم ارزش؟) است، خاص به این معنی که ربطی به اغلب مباحث دیگر ریاضی ندارد و حل آن هم مستلزم استفاده از روشهای موددی است. این مسأله نمونه واقعا مناسبی از ریاضیات محض نیست. از طرف دیگر، مسأله کره با آنکه کاربرد عملی زیادی دارد

داستش این طورها هم نیست (یعنی ریاضیات کاربردی واقعا ریاضیات بدی نیست)، اما به هر حال متفاوت است.

نکنند خیال کرده اید که من با انتخاب این عنوان اول خواسته ام توجهتان را جلب کنم، و حالا که موفق شده ام دارم حرفم را پس می گیرم و از در مصالحه وارد می شوم؟ خیر، ابتدا چنین چیزی نیست. ایمن حکم «مصالحه آمیز»، خواهی نخواهی، بحث انگیز است: خیلی از افراد، خیلی هم با حرارت، استدلال می کنند که این نوع ریاضیات (یعنی کاربردی) اصلا متفاوت نیست و درست مثل همان ریاضیات محض است، و هر کسی هم که خلاف این عقیده را داشته باشد در نظر ایشان لابد بنیاد گرای مرتجع است و الزاماً اشتباه می کند.

شما اگر ریاضیدان حرفه ای نباشید، شاید تعجب کنید وقتی بشنوید که (به قول بعضیها) ریاضیات انواع مختلفی دارد و در آن هر چیزی بسرای به هیجان آوردن هر کسی پیدا می شود. بله، دارد، و پیدا می شود؛ و آنچه در این مقاله می آید تکه پاره هایی است از مغزله ای که می شود اسمش را «جامعه شناسی» ریاضیات گذاشت: محض و کاربردی چه فرقی با هم دارند، ریاضیدانها درباره این تفاوت چه نظری دارند، و در فرهای آینده احتمالاً چه بر سر این اختلاف می آید؟

بحث بر سر چیست؟

در این باره که ریاضیات چه جور موضوعاتی را شامل می شود یا نمی شود هیچ چیز مبهمی وجود ندارد، اما پیدا کردن کلماتی که بشود با آنها ریاضیات را به طور دقیق توصیف کرد کار آسانی نیست. به علاوه، در خیلی از موارد به جای ارائه یک تعریف کلی از ریاضیات، آن را به دو جزء تقسیم می کنند، و نساذه این تقسیم بندی هم فقط به یک صورت نیست: بنا به هر یک از نظامهای مختلف رده بندی، که تعدادشان هم کم نیست، و دو نوع ریاضیات وجود دارد. از این تقسیم بندیها بعضی هاشان معروف اند و بقیه شهرت کمتری دارند. ریاضیات کارش مطالعه مقادیر یا اعداد (حساب) و شکلها (هندسه) است. این موجود می تواند گسسته یا پیوسته باشد؛ گاه منتهی است و گاه نامتناهی؛ و ناپسندتر از همه اینکه، بخشی از آن محض (به درد نخور؟) است و بخش دیگرش کاربردی (به درد خور؟). این تقسیم بندیها با همه اختلافهایی که شاید داشته باشند بهم می ربط نیستند، اما قدرشان فرقی کند؛ مثلاً تقسیم بندی

ریاضی) در مجاورت اجسام متحرک باشکلهای مختلف بحث شده باشد - يك بحث مستدل و منطقی - بی آنکه حرفی از هواپیما یا فرودگاه در میان باشد، آیا این ریاضیات محض است؟ در موارد نه این و نه آن چگونه؟ مثلاً زندگینامه‌ای که خیلی تعصب آمیز باشد ولی دروغ هم نگفته باشد، و یا مبحثی دربارهٔ آتروودینامیک که به روشهای تقریبی و مقرون به صرفه اقتصادی پرداخته باشد ولی اشتباه فاحشی هم نداشته باشد؛ اینها آیا محض اند یا کاربردی؟

طیف پیوسته

در سلسله‌ای که از زندگینامه و تاریخ توأم با تفسیر تا افسانه و خیال ادامه دارد، خطوط مرزی را کجاها باید کشید؟ گفتن اینکه توین بی، توسیدید، هومر، و جویس کدامشان محض و کدامشان کاربردی اند شاید ممکن باشد، اما اگر میان هر جفت از این اسمها تعدادی اسمی دیگر بگنجانیم، آن وقت شما می‌توانید آن‌ها در زنجیره‌ای که يك سرش تفسیر واقعیت و سر دیگرش پندار محض است مشکل و شاید هم ناممکن می‌شود. در ریاضیات هم اوضاع خیلی مشابهی هست: اگر بخواهیم مجموعه مقالاتی در زمینه‌های گوناگون، از طراحی هواپیما گرفته تا دینامیک سیالات تا معادلات دیفرانسیل جزئی تا قضایای برداری توپولوژیک را دسته‌بندی کنیم، تمایز میان محض و کاربردی که در دوسر طیف کاملاً مشخص است، در میانهٔ طیف وضوحش را از دست می‌دهد.

ریاضیات محض می‌تواند فایدهٔ عملی داشته باشد و ریاضیات کاربردی می‌تواند ظرافت هنری داشته باشد.

نکته‌ای که موضوع را از این هم پیچیده‌تر می‌کند این است که ریاضیات محض می‌تواند عملاً قابل استفاده باشد و ریاضیات کاربردی می‌تواند از ظرافت هنری برخوردار باشد. ریاضیدانهای محض در تلاش برای درک روابط منطقی و هندسی موجود در ریاضیات توانستند به نظریهٔ مجموعه‌های محدب دست بیابند و رده‌های مختلف توابع را از لحاظ جبری و توپولوژیک بررسی کنند. و شاید هم از خوش اقبالی باشد که تحدب، ابزار اصلی برنامه‌ریزی خطی (که امروزه جزء ضروری برسیه‌های اقتصادی و صنعتی است) شده، و آنالیز تابعی هم به صورت ابزار اصلی نظریهٔ کوانتوم و فیزیک ذرات درآمده است. فیزیکدانها جبر فون-نویمان را (که جزئی از آنالیز تابعی است) تنها به خاطر قابل استفاده بودنش در فیزیک ذرات بنیادی موجه می‌دانند، اما همین کاربردی‌تری را ریاضیدانها تنها جنبهٔ جالب فیزیک ذرات بنیادی تلقی می‌کنند. سلیقه است و هیچ کارش نمی‌شود کرد.

درست همان طوری که ریاضیات محض می‌تواند مفید باشد، ریاضیات کاربردی می‌تواند - حتی خیلی بیشتر از آنچه گاهی گفته می‌شود - بیفایده باشد. ریاضیات کاربردی با مهندسی یکی نیست؛ ریاضیدان کاربردی هواپیما و بمب‌انمی‌نی‌سازد. ریاضیات کاربردی يك رشتهٔ نظری است، نه جزئی از تکنولوژی صنعتی. درست است که ریاضیات کاربردی هدف‌نهایی‌اش عمل است، اما پیش از آن بخشی از علم نظری است و علم نظری هم سروکارش با اصول عامی است که پرواز هواپیماها و انفجار بمبها بر مبنای آنها صورت

اما مثال گویایی از ریاضیات کاربردی نیست؛ این مسأله از اغلب مسائل کاربردی خیلی آسانتر (و خیلی «محض» تر) است، و به خصوص اینکه در آن از حرکت - که در ریاضیات کاربردی نقش اصلی را به عهده دارد - خبری نیست.

با این همه، این مثالها - خوب و بدشان به کنسار - می‌توانند در ادامهٔ این بحث مفید باشند.

حرف یا عمل

تمایز میان محض و کاربردی را می‌توانیم - کم و بیش به همان وضوحی که در علوم دیده می‌شود - در زمینه‌های هنر و علوم انسانی هم مشاهده کنیم: آثار موسارت را با مارشهای نظامی، نقاشیهای روبنس را با تصاویر کتابهای درسی پزشکی، یا منظومهٔ ائناد و برجیل را با فیلیپیکوس سیسرون مقایسه کنید. ادبیات محض به مفاهیم مجردی مثل عشق و جنگ می‌پردازد، و نمونه‌های تخیلی آنها را به زبانی مهیج و شورانگیز حکایت می‌کند. ریاضیات محض سروکارش با تجربیاتی مثل ضرب اعداد و تساوی اشکال است، و دربارهٔ نمونه‌های ایده‌آل و افلاطونی آنها به صورتی عقل‌پسند استدلال می‌کند.

تمامی ادبیات را به يك معنی می‌شود «کاربردی» دانست. آثار شکسپیر به زندگی روزمره مربوط می‌شوند، جنگ و صلح تولستوی هم همین طور، کتاب سزار دربارهٔ جنگهایش هم همین طور. همهٔ این آثار از آنچه آدمها می‌بینند و می‌شنوند شروع می‌شوند و همهٔ آنها از حرکات و احساسات آدمها حکایت می‌کنند. به همین مفهوم تعدادی دقیق، تمامی ریاضیات را هم می‌شود «کاربردی» تلقی کرد. ریاضیات، همه از مقادیر و اشکال شروع می‌شود (که مطالعهٔ آنها نهایتاً به جبر و هندسه می‌انجامد)، و دربارهٔ چگونگی تغییر مقادیر و اشکال و تأثیر آنها بر یکدیگر بحث و استدلال می‌کند (و چنین استدلالهایی نهایتاً به مبحثی از ریاضیات منجر می‌شوند که در اصطلاح ریاضی به آن آنالیز می‌گویند).

تردید نمی‌شود کرد که سرچشمه و منبع الهام تمامی ادبیات همین دنیای فیزیکی و جامعهٔ انسانی است که در آن زندگی می‌کنیم؛ و در مورد ریاضیات هم همین طور است. و باز جای هیچ تردیدی نیست که موسیقیدانها، نقاشها، نویسندگانها، و ریاضیدانها مدام از این دنیای فیزیکی و جامعهٔ انسانی تأثیر می‌گیرند. و بنابراین، دست‌کم بخشی از دستمایهٔ آثار هنری، همین دنیای امور واقع و حرکات، همین دنیای نور و صداست. هنر در اثر تماس دائم با دنیا ناگزیر تغییر می‌کند، و شاید حتی متحول هم می‌شود.

هدف نهایی «ادبیات کاربردی» و ریاضیات کاربردی عمل است. غرض از بسک سخنرانی انتخاباتی این است که شما وادار شوید در ماشین انتخابات، مثلاً، اهرم چهارم را بکشید، نه اهرم سوم را. در حل يك معادلهٔ آتروودینامیکی منظور این است که بالهای هواپیما بتوانند هواپیما را هر چه سریعتر از زمین بلند کنند تا ساکنان خانه‌های اطراف فرودگاه سروصدايشان در نیاید. این مثالها کلی و بدیهی‌اند، اما نمونه‌های بارزتری هم هست. اگر در زندگینامهٔ يك نامزد انتخاباتی (گیریم که درست و از سر صداقت نوشته شده باشد) مستقیماً به انتخاباتی که در پیش است اشاره‌ای نشده باشد، آیا می‌شود این نوشته را ادبیات محض تلقی کرد؟ اگر در مقاله‌ای دربارهٔ چگونگی جریان هوا (ی ایده‌آل از لحاظ

می‌گیرد.

(داننده‌ها) مشاهده کرد. انگیزه ریاضیدان کاربردی این است که دنیا را بفهمد و احتمالاً آن را تغییر بدهد، نگرش لازم (با دست کم معمول) برای این کار يك نگرش بسیار دقیق است (چشم از مسأله نباید برداشت)؛ روشها به خاطر کارایی‌شان انتخاب می‌شوند (مهم، آخر کار است) و ارزش آنها هم به همین اعتبار تعیین می‌شود؛ و میزان رضایت بستگی به این دارد که جواب مسأله تا چه حد با واقعیت سازگار است و چگونه می‌شود با استفاده از آن پدیده‌های دیگری را پیشگویی کرد. ریاضیدان محض انگیزه‌اش در بیشتر موارد صرفاً کنجکاوی است؛ او بیشتر از دید عدسی «زاویه-باز» به مسأله نگاه می‌کند تا عدسی «تله» (آیسا این دوروبرها مسأله جالبتر و احتمالاً عمیقتری هست؟)؛ عامل تعیین کننده یا دست کم مؤثر در انتخاب روش، هماهنگی روش با نوع مسأله است (نصف لطفش به همین پیدا کردن روش مناسب است)؛ و میزان رضایت بستگی به این دارد که جواب مسأله تا چه حد بتواند میان مفاهیمی که ظاهراً هیچ ربطی به هم نداشته‌اند ارتباطی آشکار کند که گمانشان هم نمی‌رفت.

کننده‌ها و داننده‌ها

ریاضیدان محض به مصاف ساختار منطقی بسیار پیچیده عالم می‌رود و (اگر پیروز شود) پیروزی ابدی است.

نکته آخر مستحق تأکید است، به خصوص اگر شما هم جزو آن جماعت عظیمی باشید که به دوست، نداشتن ریاضیات مفتخرند و آن را نوعی عذاب جانکاه می‌دانند. ریاضیات محض برای ریاضیدان محض يك منبع لایزال لذت هنری است؛ این لذت فقط همچنان حل‌معما و رضایت خاطر از موفقیت (اگر اساساً موفقیتی در کار باشد) نیست، بلکه لذت اندیشیدن است. اینجا طرف مبارزه حریفی نیست که فقط در صورت باخت منا بتواند برنده شود، و پیروزی هم به محض وصول ناپدید نمی‌شود (مثل پیروزی مثلا در بازی تنیس)؛ در این مورد آنچه باید به مصافش رفت ساختار منطقی بسیار پیچیده عالم است و پیروزی هم ابدی است (بیشتر به کشف فلز قیمتی از يك کشتی مغروق می‌ماند).

این تفاوت‌های اساسی در انگیزه و نگرش و روش و رضایتمندی احتمالاً مرتبط با تفاوت‌های سطحیتر ولی قابل توجه‌تری هستند که در نحوه بیان نتایج وجود دارد. ریاضیدانهای محض و ریاضیدانهای کاربردی هر کدام در مورد وضوح، زیبایی، و شاید حتی دقت منطقی، سنتهای متفاوتی دارند؛ و نافرجام مساندن ارتباط میان آنها اغلب ناشی از همین تفاوتهاست.

غرضم از ذکر چگونگیها و چراهایی که عنوان شد این نیست که فهرست مرجعی برای تشخیص علم کاربردی از تفکر ناب فراهم کرده باشم؛ چنین تشخیصی معمولاً از طریق نوعی انتخاب شهودی صرف صورت می‌گیرد. کلمه «طیف» اشاره‌ای است برای تشبیه با واقعیت. سرخ و نارنجی به يك معنی مثل هم اند - صرفاً امواجی اند که طولهایشان اختلاف اندکی دارند - و غیرممکن است بشود روی نقطه‌ای در طیف انگشت گذاشت و گفت اینجا انتهای سرخ و ابتدای نارنجی است؛ با این همه، سرخ و نارنجی به هر صورت با هم فرق دارند و تشخیص آنها از یکدیگر تقریباً هیچ وقت کار شاقی نیست.

تفویض تفاوت میان ریاضیدانهای محض و ریاضیدانهای کاربردی گاهی همان قدر مشکل است که تشخیص تفاوت خود این موضوعات. گاهی حتی اتفاق می‌افتد که ریاضیدانی در عین حال هم «محض» باشد هم «کاربردی». بعضی ریاضیدانهای کاربردی (به خصوص بهترهاشان) معلومات عمیقی از ریاضیات محض دارند و بعضی ریاضیدانهای محض (به خصوص بهترهاشان) تجربیات درخشانی در فنون کاربردی. وقتی فرصتی دست بدهد که هر يك از این افسراد بتواند با موفقیت به آن کار دیگر پردازد (مثلاً يك ریاضیدان محض بتواند حالت خاصی از مسأله «فروشنده سیار» را که در تحقیق در عملیات پیش می‌آید درست حل کند، یا ریاضیدانی که روی نظریه نسبیت کار می‌کند بتواند فرمولی در هندسه دیفرانسیل چهار بعدی پیدا کند)، آن وقت احساسی که به او دست می‌دهد بیش از يك تفاخر ساده است: «می‌بینی! از پس این جور چیزها هم بر می‌آیم.»

آنچه تا اینجا گفته‌ام این است که ریاضیات به يك معنی تماماً کاربردی است، و دیگر اینکه متمایز کردن محض از کاربردی از جایی به بعد آسان نیست. حالا می‌خواهم از آن طرف قضیه بگویم: محض و کاربردی واقماً با هم فرق دارند، و شما اگر بدانید که باید دنبال چه چیزهایی بگردید و شهادت ارتکاب خطا را هم داشته باشید همیشه می‌توانید آنها را از هم تشخیص بدهید. خیلی بیشتر از آنکه دنبال اثبات کردن چیزی باشم، قصدم این است که چیزی را توصیف کنم. نه دل بسته‌ام به اینکه لامذهبی را به راه بیاورم و نه امیدوارم که اهل شکی را متقاعد کنم، فقط می‌خواهم به اطلاع مسافری که از دیار دیگری آمده است برسانم که اینجا، در این سرزمین، دوتا فرقه هست، و اینها چیزهایی است که این فرقه‌ها درباره همدیگر می‌گویند.

در اینجا اختلاف عقیده از آن نوعی نیست که يك فرقه بگوید «سياه» و فرقه دیگر بگوید «سفید»؛ اینجا يك فرقه می‌گوید «ما همه يك فرقه ایم» و آن یکی می‌گوید «خیر، يك فرقه نیستیم، دو فرقه ایم». با این نوع اختلاف، مشکل می‌شود واقعیتها را به طور بیطرفانه ارائه کرد. صرف پذیرفتن وجود چنین تعارضی به معنی جانبداری از يك طرف است، و این را هیچ کارش نمی‌شود کرد. بنا بر این من، ضمن اینکه نتایج کاربردی خودم قطعی است، سعی می‌کنم مطلب را به بهترین نحوی که از دستم برمی‌آید به اطلاع غریبه‌ای که در میان ماست برسانم.

بشر می‌خواهد بشناسد و به کار بگیرد. مردم می‌خواهند بدانند نیایان آنها چه کرده‌اند و چه گفته‌اند، می‌خواهند درباره جانوران و گیاهان و مواد معدنی بدانند، و می‌خواهند درباره مفاهیم اعداد و انوار و اصوات بدانند. مردم می‌خواهند خوراک فراهم بیاورند و پوشاک بدوزند، می‌خواهند خانه بنا کنند و مسافین بسازند، و می‌خواهند دردهایی را درمان کنند و به زبانهای حرف بزنند.

کننده‌ها و داننده‌ها غالباً در انگیزه، نگرش، روش کار، و «رضایت خاطر» با هم فرق دارند. این تفاوتها را می‌شود در مورد خاص ریاضیدانهای کاربردی (کننده‌ها) و ریاضیدانهای محض

زیبایی و ملال

کنند که فقط به درد خودش می خورد و هیچ حسنی بر آن متصور نیست. (اینجا بد نیست این را هم بگویم که دانشجویان يك رشته خاص ریاضیات محض - نظریه رسته ها - گاهی از سر طنز و مسخره، از رشته خودشان به نام «مهملات انتزاعی» یاد می کنند؛ ریاضیدانهای کاربردی هم اغلب در مورد این رشته همین اصطلاح را به کار می برند، و ظاهراً هیچ قصد شوخی هم ندارند.)

بدعت جدید

به ضیعا می گویند که این تمایزی که میان ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی در نظر گرفته می شود بدعت جدیدی است که استخوانهای بنیانگذاران بزرگ این علم را در قبر می لرزاند؛ دنیا دارد خراب می شود؛ در این مورد گفتار مناسبی از فیلبوس افلاطون نقل می کنم، که البته حکم بالا را به کلی نفی نمی کند، اما آن قدر هست که شما را وادار باز هم درباره اش فکر کنید:

«سقراط: آیا چنین نیست که دو جور علم حساب داریم، حساب مردم و حساب فلاسفه؟... و آیا فنون اندازه گیری و شمارش که در معماری و تجارت معمول است تفاوتی با محاسبات پیچیده و هندسه مورد استفاده فلاسفه ندارد؟ یعنی آیا باید اینها را يك نوع تلقی کنیم یا دو نوع؟»

«پروتارخوس: ... به گمانم دو نوع.»

آیا این تمایزی که سقراط می خواهد به آن برسد دقیقاً از همان نوع محض - کاربردی است؟ اگر نیست پس از چه نوعی است؟ تنها نکته غریب دیگری که می خواهم در این باره ذکر کنم این است که معمولاً (ولی نه همیشه) می توانیم ریاضیدان کاربردی را فقط با توجه به شدت موضعی که در بحث «يك فرقه، دو فرقه» اختیار می کند از ریاضیدان محض تمیز بدهیم. آنکه به شدت احساس کند یا معتقد باشد که محض و کاربردی باید یکی باشند و یکی هم هستند، هر دو ریاضیات اند و قائل شدن تمایز میان آنها مفهومی ندارد؛ در این صورت احتمالاً خودش ریاضیدان کاربردی است. ریاضیدانهای محض به این موضوع خاص شور و اشتیاق کمتری نشان می دهند و درباره آن زیاد به مجادله نمی پردازند؛ آنها در واقع محض و کاربردی را یکی نمی دانند، اما اصولاً این موضوع برایشان اهمیت چندانی هم ندارد. فکر می کنم نکته ای که ذکر کردم واقعیت دارد، ولی اعتراف می کنم که خودم هم سر در نمی آورم که چرا باید چنین باشد.

تجدید حیات

درباره رابطه میان محض و کاربردی، ادعایی که از همه قابل تمعق است و احتیاج به بررسی دارد «همزیستی» بودن آنهاست، به این معنی که هیچ يك از آنها نمی تواند بدون دیگری موجود باشد. نه تنها (چنانکه عموماً پذیرفته شده است) کاربردی احتیاج به محض دارد بلکه محض هم برای مصونیت از انتزاع، بی ثمری، بوجی، و مرگ نیازمند کاربردی است؛ محض نیازمند تجدید حیات دائم و تماس با واقعیت است که فقط به لطف کاربردی می شود آن را فراهم کرد.

مرحله اول در اثبات این همزیستی (میان محض و کاربردی) جنبه تاریخی دارد: تمامی ریاضیات، به قولی، از دنیای واقعی ناشی می شود، چنانکه هندسه هم، بنا به روایات داستانی، از اندازه گیری

خیلی از ریاضیدانهای محض، تخصص خودشان را نوعی هنر می دانند، و وقتی بخواهند کار همکار دیگری را خیلی تحسین کرده باشند با اصطلاح «فشنگگ» از آن یاد می کنند. چنین بر می آید که ریاضیدانهای کاربردی گاهی رشته خودشان را نوعی نظام بخشیدن به روشها تلقی می کنند؛ و به همین مناسبت است که در تمجید کار يك همکار دیگر گاه کلماتی مثل «استادانه» یا «قوی» را به کار می برند.

ریاضیات، ... علی رغم تعدد مباحث و تحولات بسیار سریع موضوعاتی، ... يك ساختار فکری واحد با وحدتی شگفت انگیز است.

نکته دیگری که بارها از آن متأثر شده ام این است: ریاضیات (محض)، علی رغم تعدد مباحث و سرعت رشد آنها (که از هزار سال پیش شروع شده و در زمانه ما از هر دوره دیگری سریعتر بوده است)، يك ساختار فکری واحد با وحدتی شگفت انگیز است.

ریاضیانی که فعلاً زنده و فعال است آن قدر بخشهای متعددی دارد و هر يك از این بخشها آن قدر وسیع است که امکان ندارد کسی همه آنها را بلد باشد. در نتیجه خیلی اتفاق می افتد که ما - همه ما - به شنیدن سخنرانیهای عمومی برویم که معلوماً همان درباره موضوع آنها خیلی کمتر از آنی است که مثلاً يك تاریخدان معمولی درباره زبان شناسی می داند. اما فرق نمی کند که سخنرانی درباره عملگرهای نامحدود باشد یا درباره گروههای تعویض پذیر، یا رویه های توأزی پذیر؛ تأثیر متقابل بخشهای بسیار مختلف ریاضیات (محض) همیشه به وضوح مشاهده می شود. مفاهیم و روشهای هر يك از این مباحث روشنتر همه مباحث دیگر است؛ و نهایتاً کل ریاضیات به صورت ساختاری جلوه می کند که به نحو شگفت انگیزی وحدت یافته است.

این وحدت، این بینش ذوقی مشترک، در اغلب موارد میان ریاضیات محض و کاربردی موجود نیست. من وقتی دارم به يك سخنرانی درباره مکانیک سیالات گوش می کنم، خیلی زود از رهیافت (به نظر من) موددی متحیر می شوم؛ بعد این تحیر کم کم جای خودش را به سردرگمی، بسی حوصلگی، گیجی، و ناراحتی شدید می دهد، و قبل از آنکه بحث به آخر برسد، دیگر از هیچ چیزی سردر نمی آورم. ریاضیدانهای کاربردی هم وقتی به يك سخنرانی مثلاً درباره هندسه جبری یا در مورد هیأتی با مشخصه غیر صفر گوش می کنند گرفتار سلسله ای از احساسات بسیار مشابه می شوند و این احساسها را یا کلماتی مثل ذهنی، مصنوعی، خزعلات باروک، و موشکافی عیب توصیف می کنند.

ممکن است گفته شود که، از دیدگاه علمی درست و رفیع و بی تعصب، هر دو طرف اشتباه می کنند، اما شاید هر دو طرف تا حدود زیادی حق داشته باشند - که این خود گواهی بر این مدعا است که ما در واقع دو موضوع پیش رو داریم نه يك موضوع. در نظر خیلی از ریاضیدانهای محض، ریاضیات کاربردی چیزی نیست جز ابیاتی از ترفندها، که هیچ حسنی ندارند جز آنکه به کار می آیند؛ و خیلی از ریاضیدانهای کاربردی هم به خودشان حق می دهند بخش عمده ریاضیات محض را نوعی انتزاع بی فایده تلقی

بله، بیماری وجود دارد، این را همه می‌دانند، اما خوشبختانه درمان آن هم در خود طبیعت تعبیه شده است. طی قرن‌ها، چندین بخش از ریاضیات رشد عظیم سرطانی داشته‌اند؛ نمونه‌هایی از این موارد که احتمالاً جای حرف ندارند بعضی بخشهای هندسه اقلیدسی مقدماتی‌اند. وقتی این درد عارض می‌شود، همیشه به دنبالش درمان شگفت‌انگیزی هست. ریاضیات قدیم هیچ وقت نمی‌میرد - میرالی که ۲۵۰۰ سال پیش یونانیها بر ایمان به جا گذاشتند همچنان زنده و درست و جالب است - ولی ملحقات آن هر چه ساده‌تر می‌شوند، هسته‌ها ارزش آنها در بدنه اصلی ادغام می‌شود و زوائد ناچورشان از آنها جدا می‌شوند.

(در ضمن بدنیست گفته باشم که بحث تجدید حیات را علی‌الاصول می‌شود در مورد نقاشی هم پیش کشید، اما تا آنجا که من خبر دارم هیچکس چنین کاری نکرده است. نقاشی از دنیای واقعی نشأت گرفته، و معلوم شده است که این دنیا را ترا کرده تا به قلمرو انتزاع و پیچیدگی، که در نظر بعضیها زنده است، برود، اما این هنر به طور کلی همچنان زنده است و تمام این بلاها را از سر گذرانده است. در مدح پیامدهای تماس میان ریاضیات محض و کاربردی گاهی به موضوع زمان اشاره می‌شود. مثلاً گفته می‌شود که اگر ریاضیدانهای محض توجه بیشتری به ماسکول می‌کردند می‌توانستند گروههای توپولوژیک را خیلی زودتر از اینها کشف کنند. شاید هم چنین می‌شد، اما می‌خواهم بدانم که با دیرتر کشف شدن آنها مثلاً چه چیز را از دست داده‌ایم؟ آیا اگر رامبرند یک قرن زودتر متولد شده بود اوضاع دنیا بهتر از این می‌شد؟ پس این تجزیه چه لزومی دارد؟)

اینکه آیا تماس با کاربردها می‌تواند از بیماری پیچیدگی و «باریکی» در ریاضیات پیشگیری یا آن را درمان کند و اقامت معلوم نیست؛ چیزی که معلوم است این است که خیلی از بخشهای فعال و مطمئناً غیر سرطانی ریاضیات، چنین تماسهایی ندارند (و شاید هم، به علت میزان انتزاعی بودنشان، نمی‌توانند داشته باشند). نمونه‌های اخیر: نظریه تحلیلی اعداد و هندسه جبری.

وقتی می‌گویم ریاضیات محبوب نیست که به کمک تماس با واقعیت تجدید قوا کند منظورم این نیست که اصلاً نباید تجدید قوا کند؛ خیلی از مفاهیم زیبای ریاضیات در مطالعه این بخش یا آن بخش طبیعت کشف شده‌اند، که شاید اگر انگیزه خارجی نبود کشف نمی‌شدند، و شاید هم می‌شدند؛ مطمئناً خیلی چیزها همین‌طور کشف شده‌اند.

موضوع اگر تأثیر متقابل ریاضیات محض و کاربردی باشد، به نظر می‌رسد واقفان این است که چنین تأثیری وجود دارد، در هر دو جهت هم وجود دارد، اما در یک جهت خیلی شدیدتر است تا در جهت دیگر. کاربردها بخش عمده‌ای از منشأ ریاضیات محض‌اند و کماکان گاه به گاه منبع الهام این نوع ریاضیات‌اند، اما ضروری نیستند. مفاهیم و استنتاجهای محض برای ریاضیات کاربردی در حکم وسیله، طرح سازمانی، و معمولاً در حکم راهنمایی مؤثر به واقعیت‌های عالم‌اند - جزء ضروری ارگانیزم کاربردی‌اند. بازم حکایت مسورچه و مسورچه‌خوار است: شاید مسورچه‌خوار احتمالاً نوعی ارزش محیط‌شناختی برای مسورچه داشته باشد، که تازه این هم جای بحث دارد، اما مطمئناً حرف ندارد که مسورچه برای ادامه

عوارض طینانهای رود نیل آغاز شده است. (اگر این روایات غلط باشند، هندسه پیش از آنکه به آن نیازی باشد وجود داشته، و استدلال همزیستی بر مبنای مترز لسی بنا شده است. اگر صحیح باشد، این استدلال فقط در جهت اثبات آن است که ریاضیات کاربردی نمی‌تواند بدون ریاضیات محض سر کند، همان‌طور که ادامه زندگی مسورچه‌خوار هم بدون مسورچه امکان ندارد، اما عکس این مطلب الزاماً صادق نیست.)

اگر درست باشد که ریاضیات از مطالعه مقادیر (متعلق به چیزها) و اشکال (متعلق به چیزها) ناشی شده است، پس ریاضیات به تمامی از چیزهای دنیای واقعی نشأت می‌گیرد. اینکه آیا ظهور بعضی اجزاء بسیار مهم ریاضیات قرن بیستم (مثل مسأله پیوستار کانتور، فرضیه ریمان، و حدس پوانکاره) مستلزم تماسهای جدید یا فیزیک، روانشناسی، زیست‌شناسی، یا اقتصاد بوده است جای بحث دارد. اما معضل اصلی جنبه تاریخی ندارد بلکه يك مشکل ذاتی است. بازی شطرنج تمثیل مناسبی برای این مسأله است. ریاضیدانها معمولاً - و گاهی هم یا اکراه - می‌پذیرند که شطرنج جزئی از ریاضیات است. اگر اهلشان به این خاطر است که شطرنج را ریاضیات «خوبی» نمی‌دانند؛ شطرنج از دیدگاه ریاضیاتی، بازی «پیش‌پا افتاده» ای است. اما مهم این است که شطرنج ریاضیات است، و ریاضیات محض هم هست.

ریاضیات کاربردی نمی‌تواند بدون ریاضیات محض به سر برود همچنانکه ادامه زندگی مسورچه‌خوار هم بی‌مسورچه ممکن نیست، اما عکس این مطلب الزاماً صادق نیست.

شطرنج طی چندین صدسال از لحاظ مفهومی تجدید قوا نکرده، و با وجود این هنوز هم کاملاً زنده و برقرار است. میلیونها نفر در باشگاههای شطرنج عضویت دارند، و هر چند وقت یکبار خیل عظیمی از مردم دنیای متمدن، ساعتها پای تلویزیون می‌نشینند که بازی بابی فیشر و یوریس اسپاسکی را تماشا کنند. شطرنج تخیل گروه بزرگی از آدمها را به کار می‌اندازد؛ ذوق هنرمندانه برمی‌انگیزاند و کم و بیش بصیرتهای ذاتی را جلوه‌گر می‌کند.

شطرنج (هم مثل بسیاری از بخشهای دیگر ریاضیات) نه فقط نیازی به احیاشدن توسط عامل خارجی - یعنی دنیای واقعی - ندارد بلکه هر از گاهی خود به خود احیا می‌شود. آخرین دفته‌ای که این اتفاق افتاد وقتی بود که مطالعه تحلیل قهرایی شطرنج به طور جدی شروع شد. (مسأله نمونه: يك صفحه شطرنج در يك وضعیت خاص مفروض است؛ باید پیدا کنید که سفید از کدام طرف صفحه بازی را شروع کرده، و آیا سیاه هیچ وقت به قلعه رفته است یا نه.) و این هم يك تحول: نه تنها شطرنج برای تجدید حیات نیازمند دنیای واقعی نبوده، بلکه عکس این موضوع اتفاق افتاده است. تحلیل قهرایی شطرنج، دانشمندان علوم کامپیوتر را با مسأله‌ای از يك نوع جدید روبرو کرده، و این تحلیل فعلاً جزء کوچک ولی معتبر و در حال رشدی از ریاضیات کاربردی است.

طرفداران «تجدید حیات» ممکن است علی‌رغم این شواهد بازم قانع نشوند؛ آنها ممکن است به گرایش استفار ریاضیات به فوق انتزاع، فوق پیچیدگی، و نامفهومی و زشتی اشاره کنند و بگویند که دوی این دردها تماس با واقعیت‌های کاربردی است.

حیات و گذران مورچه‌خوار ضروری است.

چشم انداز آینده

معروفترین بخشهای ریاضیات جبر و هندسه‌اند، اما برای دست‌اندرکاران بخش سومی هم هست، به اسم آنالیز، که به همان اندازه دونا‌ی دیگر اهمیت دارد. «آنالیز» از مفهوم تغییر شروع می‌شود. این کافی نیست که فقط خودمقادیر و اشکال را مطالعه کنیم، لازم است این راه هم بررسی کنیم که مقادیر و اشکال چگونه تغییر می‌کنند. راه طبیعی اندازه‌گیری تغییر این است که اختلاف [دیفرانسیل] میان قدیم و جدید را بسنجیم؛ از همین کلمه «دیفرانسیل» معلوم می‌شود که وجه تسمیه اصطلاح فنی «معادله دیفرانسیل» چیست. بیشتر بخشهای کلاسیک ریاضیات کاربردی با تغییر - یعنی حرکت - سروکار دارند و مهمترین و مفیدترین وسیله آنها نظریه و تکنیک معادلات دیفرانسیل است.

پدیده‌های دنیای واقعی محتملاً به‌متغیرهای زیادی بستگی دارند: ما کول بودن يك خوراك بستگی دارد به اینکه مثلاً مدت پخت آن چقدر بوده، درجه دمای پخته‌شده، و چقدر ادویه داشته است. برای آنکه بتوانیم حاصل کار را به‌طور صحیح پیش‌بینی کنیم باید متغیرها را جدا از هم در نظر بگیریم؛ وقتی جزئی از داده‌ها تغییر کند چه تغییری در نتیجه کلی حاصل می‌شود؟ به همین خاطر است که بخش اعظم ریاضیات کاربردی این چنین به‌نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی گره‌خورده است؛ در واقع این لفظ اخیر برای بعضیها کم‌وبیش مترادفی برای ریاضیات کاربردی است.

آیا تحولات بزرگ هنوز هم دارند صورت می‌گیرند و بعداً هم صورت خواهند گرفت؟ آیا احتمال دارد که يك شکسپیر ریاضیات (مثل ارشمیدس یا گاوس) حالا هم موجود و مشغول کار باشد، یا در آینده با به‌میدان بگذارد؟ جبر، آنالیز، یا هندسه؟ ریاضیات آینده از چه نوعی است و روابط میان محض و کاربردی چگونه خواهد بود؟

من جواب این پرسشها را نمی‌دانم، هیچ‌کس نمی‌داند، اما از گذشته و حال می‌شود نشانه‌هایی به‌دست آورد؛ بر پایه این نشانه‌ها و بر پایه امیدهای که همواره بامن است می‌خواهم یکی دوتا حدسه‌های سردستی‌ام را در این باره عنوان کنم. آسانترین این پرسشها آن است که به تحولات بزرگ مربوط می‌شود: بله، این تحولات هنوز هم دارند اتفاق می‌افتند. ریاضیدانها تقریباً هر سال دارند پاسخ پرسشهایی را پیدا می‌کنند که از دهها سال پیش یاد مراد می‌شود حتی از قرن‌ها پیش مطرح بوده‌اند. اگر کانتور، ریمان، و پوانکاره امروز به دنیا برمی‌گشتند، طلبه‌های هیجانزده و حریصی می‌شدند که می‌توانستند خیلی از چیزهایی را که می‌خوانستند بدانند یاد بگیرند.

در آینده قابل پیش‌بینی، ریاضیات گسسته وسیله مفیدی خواهد بود که در تلاش برای درک دنیا روز به روز کارآمدتر خواهد شد. ... بنابراین، نقش آنالیز به همان نسبت کوچکتر خواهد شد.

آیا امروز هم ارشمیدسی در دنیا هست؟ احتمالاً خیر. آیا هیچ‌وقت گاوس دیگری به دنیا خواهد آمد؟ دلیلی نمی‌بینم که نیاید؛ امیدوارم که بیاید، و شاید هم به همین علت است که فکر

می‌کنم خواهد آمد.

به گمان من در آینده قابل پیش‌بینی، ریاضیات گسسته وسیله مفیدی خواهد بود (همچنانکه امروز هم هست) که در تلاش برای درک جهان روز به روز کارآمدتر خواهد شد، و بنابراین نقش آنالیز به همین نسبت کوچکتر خواهد شد. نمی‌خواهم بگویم که به‌طور کلی آنالیز و به‌خصوص معادلات دیفرانسیل جزئی عمرشان به سر آمده و قدرشان دارد رو به زوال می‌رود؛ اما دارم حدس می‌زنم که قدری از این همه صفحاتی که همیشه در تمام کتابهای ریاضیات کاربردی در اشغال آنالیز بوده است نه‌فقط به ریاضیات ترکیبی بلکه به بحثهای پیچیده‌تری در نظریه اعداد و همچنین به هندسه اختصاص خواهد داشت.

ریاضیات کاربردی ناچار به تغییر است، هم به این خاطر که مسائل تغییر می‌کنند و هم به این خاطر که ابزارهای حل مسائل تغییر می‌کنند. هر چه معرفت ما از دنیا بیشتر می‌شود، و یاد می‌گیریم که چطور مهار بعضی پدیده‌های آن را به‌دست بگیریم، ناگزیر با پرسشهای جدیدی مواجه می‌شویم، و ریاضیات محض هر چه رشد بیشتری می‌کند، زوایایش را دور می‌ریزد و در نتیجه عمیق‌تر و ساده‌تر می‌شود، و تکنیکهای جدیدی برای استفاده در اختیار ریاضیات کاربردی می‌گذارد. اینها همه چه ربطی به رابطه میان مورچه و مورچه‌خوار دارد؟ به گمانم ربط چندانی نداشته باشد. هر يك از دو نوع کنجکاو، یعنی محض و عملی، ناچار است که ادامه داشته باشد، و سقراط ۲۴۰۰ سال بعد، تفاوت میان آنها را به همان وضوحی خواهد دید که سقراط ۲۴۰۰ سال قبل می‌دید.

حالا، بعد از این همه که گفته شد، ماحصل کلام چیست؟ شاید بشود این همه را تنها در کلمه «سلیقه» خلاصه کرد.

يك پرتره کار پیکاسو را عده‌ای زیبا می‌دانند، و عکسی که اداره آگاهی از يك جت‌پنکار فراری، منتشر کرده است می‌تواند مفید باشد، اما احتمال دارد کار پیکاسو شباهت چندانی با واقعیت نداشته باشد و عکس اداره آگاهی خیلی الهام بخش و جاذب نباشد. آیا این خیلی بی‌انصافی است که بگویم این پرتره نسخه بدی از طبیعت و این عکس نوع بدی از هنر است؟

بخش اعظم ریاضیات کاربردی بسیار ارزشمند است. اگر يك تکنیک ذهنی به ما چیزی در این باره یاد بدهد که خون چطور تلمبه می‌شود، امواج چطور منتشر می‌شوند، و کیهکشانه‌ها چطور منبسط می‌شوند، در این صورت این تکنیک، علم در اختیارمان می‌گذارد و دانشمان را زیاد می‌کند، دانش به همان معنی کلمه که شایسته‌ترین احترام است. اگر بگویم که متون قانونی (با آن کلمات قلبه و نثر خشک سنتی) بسد ادبیاتی است، به‌عین فکر، دقت، و خدمات اجتماعی علمای قانون‌نویس توهین نکرده‌ایم. به همین ترتیب توهینی به پیش، تکنیک، و خدمات علمی علمای ریاضیات کاربردی نکرده‌ایم اگر بگویم که کشفیات آنها درباره خون، و امواج، و کیهکشانه‌ها، ریاضیات کاربردی درجه یکی است؛ اما، معمولاً، ریاضیات کاربردی ریاضیات بدی است و فرقی نمی‌کند که از چه درجه‌ای باشد.

• Paul R. Halmos, "Applied mathematics is bad mathematics," *Mathematics Tomorrow*, edited by Lynn Arthur Steen, Springer-Verlag (1981) 9-20.