

گزاره "هر A بی C است" را استنتاج کنید، اما در لابلای کل آثار ارسطو و برتراند راسل، به علاوه بخش قابل توجهی از آثار مدرسون، نخواهید توانست کلمه‌ای پیدا کنید، که بدون دخالت ضلالانه مگر خودتان، به شما بگوید چه هنگام روش قیاسی را به کار برید، یا آنکه کدام گزاره را با به عنوان مقدمات کبری و صغری به کار بگیرید. منطق هرگز پرسشی را برای شما پاسخ نمی‌گوید مگر آنکه او را در برابر پرسش معینی قرار دهید. حتی در آن هنگام هم هیچگاه بطور داوطلبانه دازی را نداشت نمی‌کند. زبان آن زبانی دو واژه‌ای است، فقط "آری" و "نه" را می‌فهمد. منطق ناقد است نه خالق - حتی در مورد قوانین انتقاد خود. فردی که صرفاً مجهز به منطق است، مسلماً هر گزاره ریاضی بدی انجام نخواهد داد ولی مسلماً هر گزاره ریاضی خوبی هم ارائه نخواهد داد.

ریاضیات به همان اندازه که هنری خلاق است به همان اندازه هم علمی منطقی است. همان گونه که در بالا گفتیم، اگر بخواهید پاسخ پرسشی را بدانید، نخست باید پرسش را مطرح کنید، و هنر ریاضیات هنر پرسیدن پرسشهای درست است. از هر مجموعه‌ای از اصول یا مقدمات یا فرضیات، می‌توان بینهایت لم و قضیه و نتیجه استنتاج کرد که، از نظر قیاس منطقی، هر کدام به اندازه دیگری سنجیده باشد. برای برخی از اینها هر ریاضیدانی اهمیتی استعلایی قائل خواهد شد، بخش بیشتری از آنها هم ذخیره معمولی مجلات ریاضی را تشکیل خواهد داد، ولی بخش اعظم آنها به اتفاتی نظر بیپرده و پیش‌پا افتاده تلقی خواهد شد. قضاوت در این موارد، کاملاً از حدود صلاحیت منطقی تجاوز می‌کند، اما توانایی تمیز این قضایای پیش‌پا افتاده از نتایج و اما مهم در یک رشته معین ریاضی دقیقاً همان توانایی است که ریاضیدان با تجربه صاحب آن است و ریاضیدان بی‌تجربه فاقد آن.

چه قضیه‌ای مهم است؟ اهمیت برخی قضایا ناشی از کاربردهای فیزیکی و فنی مستقیم آنهاست؛ اهمیت برخی دیگر از مقام و منزلتشان در پدید آمدن نظریه جدیدی که مورد علاقه است سرچشمه می‌گیرد با این همه، قضایای دیگری هم هستند که اهمیتشان ناشی از زیبایی، تازگی و غنایی است که به نظر به‌ای می‌بخشند، نظریه‌ای که آن قضایا جز لاینفک آن را تشکیل می‌دهند. ماهیت خصوصیات اخیر اساساً زیبایی‌شناختی است، و طبعاً به قضاوت فردی و شخصی وابسته است - دوست ماند همه کیفیتهای زیبایی‌شناختی. با توجه به وجود درجات مختلف زیبایی و اهمیت، همراه با فقدان معیار پذیرفته شده کلی و ثابتی در مورد این خصوصیات، با توجه به وجود مدها، معیارهای محلی و ملی و حالتی استثنایی فردی، خویشاوندی اساسی سلیقه ریاضی با سلیقه هنری آشکار می‌شود.

بنابراین، برای ارائه کار ریاضی خوب، و درحقیقت، برای ارائه هر نوع کار ریاضی، تلاش مکانیکی برای استنتاج نتایج از مجموعه‌ای از اصول - چنانکه گویی با نوعی ماشین حساب ابر-بیسیجی^۱ سروکار داریم - کفایت نمی‌کند. باید انتخاب کرد. فرضیه‌هایی که نقطه شروع کار را تشکیل می‌دهند فقط به این معنی شامل نتایج هستند که کلیدهای پیاپی شامل سوناتا هستند، یا قطعه بوم و شیشه‌های رنگ شامل یک تابلو نقاشی هستند، یا سنگ مرمر، شامل پیکره‌ای است.

قوة تخیل شاه فرکار ریاضی است، و منطق، رقاصک آن است. همانند ساعت، تا زمانی که شاه قتر تا حد معینی پیچانده نشود رقاصک حرکت خود را آغاز نمی‌کند. امکان استدلال منطقی تنها هنگامی پدید می‌آید که پرسش ریاضی خود را طرح کرده باشیم، و لاف در مورد یکی از پاسخهای موقتی به آن اندیشیده باشیم. پاسخ موقتی ما

ماهیت تفکر ریاضی

نوربرت وینر

چنانچه علوم و معارف جا افتاده گوناگون را بنا بر موضوع آنها دسته بندی کنید، نخستین و عمیقترین شکافی که خواهید یافت شکاف میان ریاضیات از یک سو، و مابقی معرفت آدمی از سوی دیگر خواهد بود. تا آنجا که صحبت از نتایج اثبات شده ریاضی در میان است، ریاضیات از نظر کیفیاتی چون انسجام، تسلسل منطقی، دقت، و قطعیت در میان علوم بیهمناست؛ و اگر به این خصوصیات محتوای ریاضیات، کمال حیرت آور صورت آن را هم که خصیصه آشنا ترین بخش علوم ریاضی - یعنی هندسه یونانیان - است بیافزاییم، کاملاً طبیعی است که فرایندهای ذهنی ریاضیدان و روشهایی که او برای به دست آوردن نتایج خود به کار می‌برد، برای فرد غیر متخصص عجیب و اسرارآمیز جلوه کند. خصوصیت اخیر باعث می‌شود که روند ابداع، خصوصیات هر بوط به نظام ارائه مطلب را به خود بگیرد، و افکار نویسی محقق را از دقت و ترتیب منطقی برخوردار می‌کند که فقط در خاطرات انتشار یافته او منعکس می‌شود. شاید دقت در تمایز نظام هستی از نظام اندیشه در هیچ زمینه‌ای به اندازه ریاضیات اهمیت نداشته باشد. با اندکی تأمل می‌توان ملاحظه کرد که هر گونه تفسیری از ریاضیات که منطق را نه تنها معیار تعیین اعتبار فرایندهای آن بلکه مهمترین وسیله شهودی آن نیز تلقی می‌کند، در همان نگاه نخست، تفسیری بی‌معنی است. نظریه قیاس به شما امکان می‌دهد تا با داشتن گزاره‌های "هر A بی B است" و "هر B بی C است" بتوانید

به نتایج هدایت می‌کنند، هوشیار باشد. بیشتر نظر به‌ها دارای شرطهایی هستند که یا اصلاً ضرورتی ندارند یا می‌توان شرطهای اساسی‌تری را به‌جای آنها گذاشت. بیشتر تحقیقات فقط به‌جزئی از مسأله مورد نظر پاسخ می‌گویند درحالی‌که ممکن است به‌کل آن هم به‌آسانی پاسخ دهند. در هر شاخه‌ای از ریاضیات اثبات قضایا در سطح معینی از تجرید، از همه سطوح دیگر آسانتر است، و به‌مجردی که از این سطح تجاوز کنیم یا توانیم به‌آن دسترسی پیدا کنیم دچار پیچیدگیهای غیر ضروری می‌شویم. مشخصه ریاضیدان بزرگ این است که تعدادی نظریه مجزا، ناقص، پیچ در پیچ و دشوار را از طریق ادراک عمیق اهمیت واقعی و وزنه روشهای هر یک، در کل واحدی ادغام کند که روشن، درخشان و ساده باشد.

ریاضیات علمی تجربی است. صورتبندی و امتحان فرضیه‌ها همان نقشی را در آن ایفا می‌کنند که در شیمی، فیزیک، نجوم، یا گیاهشناسی. در ریاضیات هم مانند علوم طبیعی، طرز تلقیهای گذشته با یکدیگر مقایسه می‌شوند، توسط واقعیات امتحان می‌شوند، و از طریق فرمایش متقابل فرسوده می‌شوند، تا آنکه جنبه جدید و ناآشنایی پیدا کنند. تاجایی که به‌روش علمی و فرایندهای ذهنی محقق مربوط می‌شود، چندان تفاوتی نمی‌کنند که ریاضیدان توسط مداد و کاغذ آزمایش می‌کند، درحالی‌که شیمیدان لوله آزمایش و قرع و انبیک را به‌کار می‌گیرد، یا زیست‌شناس از لام و میکروسکوپ استفاده می‌کند. آزمایش عبارت است از مواجه ساختن مفاهیم پیش از تجربه با واقعیات جا افتاده. و در ریاضیات هم، به اندازه هر علم دیگری، مفاهیم دانشمند نتیجه پیشداری است و واقعیات هم به همان اندازه جا افتاده است. تنها اختلاف اساسی میان ریاضیات و علوم دیگر در این امر نهفته است که دانش ریاضی از پس‌اندازی به مراتب بیشتری برخوردار است، یعنی زمانی که تجربه در پاسخ به پرسشهای ما "آری" و "نه" را فقط زمزمه می‌کند، منطق آن را فریاد می‌زند.

اما از آنجا که مداد و کاغذ از زانتر از میکروسکوپ و قرع و انبیک است، و از آنجا که در تحقیقات ریاضی دوره‌های طولانی انتظار، چنانکه در علوم دیگر به‌خاطر ساختن وسائل آزمایشگاهی تحمیل می‌شود، وجود ندارد، یا از اندر کشتهای شیمیایی و قشگیر خبری نیست، یا هزاران هزار خرده‌گر فزاربهای دیگری که موی کارکنان آزمایشگاه را قبل از موعد خاکستری می‌کند وجود ندارد، ریاضیدان از امتیاز بزرگی برخوردار است: او می‌تواند هر خطایی را که دلش می‌خواهد مرتکب شود، یا طرح پرسشهایی که نمی‌تواند پاسخ گوید وقت‌گذرانی کند، می‌تواند مرتکب هر نوع لغزشی بشود، در سردرگمی فرورود، یا به هر دری بزند؛ و اگر بتواند از این در به‌دری یکی دو سر نخ خوب بیاید، باز هم نه او و نه کس دیگری سرسوزنی مصون از خطاست؛ و او اگر از شبح سایه هر سر نخ استقبالی کند و قبل از آنکه گزارش‌گذاران‌دا بیازماید، نه تنها زبانی نمی‌بیند بلکه سود زیادی هم می‌برد؛ زیرا درست همین اندیشه‌های سرگردان هستند که ممکن است دیدگاه جدیدی را به‌دست دهند که به تأسیس مبحث جدیدی یا اجزای مبسوط قدیمی منجر شود. ریاضیدانی که اجازه می‌دهد تا حسن تجمل ریاضی او مانع سیر آزاد قوه تخیلیش شود در حقیقت دست راست خود را قطع می‌کند.

ترجمه شاپور اعتماد

ممکن است در آغاز مبهم باشد - بسیار مبهم، و ماهیتی کاملاً بیگانه با تفکر منطقی داشته باشد، زیرا ممکن است حتی به اندازه کافی شکل گرفته و معین نباشد که بتوان آن را به روشنی روی کاغذ آورد. هیچ چیز شگفت‌انگیز تر از قوه ذهن نیست، قوه‌ای که می‌تواند چنین فرضیه‌های مبهم ولی مفیدی را در ارتباط با موضوعی مجرد و منطقی صورتبندی کند. شگفتی من از این است که در آن لحظات تخیل غیر ارادی، که بخش قابل توجهی از اوقات تحقیقات ما را تشکیل می‌دهد، محتوای واقعی آگاهی ما چیست؟ آنچه ما به آن آگاهیم چیزی جز تصویری تاریک و مبهم از قضیه در انتهای تحقیقاتمان نیست، چون نور کم‌سوی شهود ممکن است گمراه‌کننده از آب درآید و تحقیق ما به ناکامی بینجامد. آن برسپهای روانشناختی از معنا که همتای روانشناختی قضیه دو جمله‌ای را نوعی فشار عصبی نشناخته در نه کاسه‌های چشم تلقی می‌کنند یقیناً به تحلیل و درک حالت ذهنی ریاضیدان کمک چندانی نمی‌کنند.

وجود چنین رؤیاهای ریاضی، در روز روشن و در اوج تحقیقاتی دشوار (که کم‌ترین شباهتی با رؤیاهای عادی شبانگاهی ندارد)، شاید در مورد هندسه آسانتر قابل درک باشد، چون این نوع رؤیاهای در هندسه تا اندازه زیادی به‌یک قوه تخیل فضایی وابسته‌اند، که به‌دقت پرورش یافته باشد. اما حتی در این زمینه هم حیرت‌آور است که چگونه یک تصویر دویا سه‌بعدی می‌تواند ناقل مفهومی به فضای چهار یا پنج‌بعدی، یا حتی بینهایت بعدی باشد. لیکن در زمینه‌های بسیار انتزاعی آنالیز جدید، کمکی که قوه تخیل فضایی می‌تواند تأمین کند، اگر چه دارای ارزشی انکارناپذیر است، نامنظم و گهگاهی است. هیچگونه تصویری از مجموعه نقاط همه‌جا چگال شمارشپذیر یا از خم پیوسته فاقد مماس در هر نقطه، برای نمایش پیچیدگی موقعیت مورد نظر کفایت نمی‌کند. در سراسر نظریه توابع، نظریه اصول موضوع، و نظریه مجموعه‌ها، مجموعه عادات فکری که اصلاً تخیل را امکان‌پذیر می‌سازند، به همان اندازه جزو اکتسابات جدید ذهن آدمی به‌شمار می‌آید که تن و اعضای پروانه جزو اکتسابات جدید کرم ابریشم به‌شمار می‌آید.

آنچه در تخیل ریاضی اهمیت حیاتی دارد، عادات فکری است و نه محتوای تخیلی و حسی ذهن. از آنجا که قوه تخیل ریاضی باید دیر با زود در معرض نقد منطقی واقع شود، ضروری است که این عادات با منطق تطابق داشته باشند. نخستین و مهم‌ترین این عادات عبارت است از این عادت که ریاضیدان باید افکار خود را دائماً در معرض قضاوت منطقی قرار دهد. او باید دائماً تلاش کند پیامدهای نهفته در مفاهیم خود را آشکار سازد، و باید درجا تشخیص دهد که چه موقع اثباتش از حدود مجاز تجاوز کرده است، و نتیجه‌ای گرفته است که آشکارا غلط است. او باید به‌مراحل نظریه پیشنهادی خود یک سامان منطقی موقت ببخشد، و دامنه مفروضات اثبات‌نشده را آنقدر تنگ کند که نتایج او از آغاز تا پایان با یکدیگر ارتباط یابند. او باید دست‌نگاه نظری خود را در ذهن بجرخاند، و آن را توسط کلیه مثالهای ممکن و در حد نبوغ خود امتحان کند. وقتی نقضی می‌یابد، باید ببیند که ناشی از ماهیت ایده‌های خود است یا آنکه امری صرفاً تصادفی است و با رهیافت نبوغ‌آمیز دیگری رفع شدنی است. او باید تلاش کند هر آنچه را بنا می‌کند بپزدان کند، و هر آنچه را ویران می‌کند از نو بنا نهد.

ریاضیدان نه تنها باید در ابداع مسائل جدید و کشف آزمونهای حل و فصل‌کننده برای امتحان پاسخهای خود قوه تخیل خود را به‌کار گیرد، بلکه باید همواره در مورد انواع پیامدهای روشهایی که او را