ریاضیات خوب چیست؟*

ترنس تائو*

۱. جنبه‌های گوناگون کیفیت ریاضی

همهٔ ما بر این باوریم که ریاضیدانها باید تلاش کنند ریاضیات خوبی به‌وجود آورند. اما «ریاضیات خوب» به چه معنی است؟ آیا اصلاً باید برای تعریف آن اقدام کرد؟ اجازه دهید برگردیم به سؤال اولمان. به محض اینکه این سؤال مطرح می‌شود، هرکسی تشخیص می‌دهد که گونه‌های مختلفی از ریاضیات وجود دارد که می‌توان آنها را «خوب» به‌شمار آورد. برای نمونه، عنوان «ریاضیات خوب» را می‌توان بدون در نظر گرفتن هیچ اولویتی به موارد زیر اطلاق کرد:

(i) حل مسألهٔ خوب ریاضی (مثلاً پیشرفت عمده‌ای در حل یک مسألهٔ مهم ریاضی)؛

(ii) تکنیک خوب ریاضی (مثلاً استفادهٔ ماهرانه از روشهای موجود یا ابداع راهکارهای جدید)؛

(iii) نظریهٔ خوب ریاضی (مثلاً یک چارچوب مفهومی یا انتخاب دستگاهی از نمادها که مجموعه‌ای از نتایج را به‌صورت نظام‌مند یکپارچه سازد و تعمیم دهد)؛

(iv) بصیرت عمیق ریاضی (مثلاً یک ساده‌سازی مفهومی مهم یا تشخیص یک اصل، روش اکتشافی، شباهت، یا موضوع وحدت‌بخش)؛

(v) کشف خوب در ریاضیات (مثلاً کشف یک پدیده، رابطه، یا مثال ناقض جدید، چشمگیر، و غیرمنتظره)؛

(vi) کاربرد خوب ریاضیات (مثلاً کاربرد ریاضیات در فیزیک، مهندسی، علوم رایانه، آمار و غیره یا کاربرد یک شاخهٔ ریاضیات در شاخهٔ دیگر)؛

(vii) شرح و توصیف خوب ریاضیات (مثلاً بررسی مبسوط و آموزندهٔ یک مبحث ریاضی، یا بحثی مستدل و روشن همراه با زمینه‌چینی مناسب در مورد یک موضوع ریاضی)؛

(viii) تعلیم خوب ریاضیات (مثلاً سبکی در سخنرانی یا نوشتن که زمینهٔ یادگیری مؤثرتر ریاضیات را برای دیگران فراهم کند، یا مشارکت در آموزش ریاضیات)؛

(ix) بینش خوب در ریاضیات (مثلاً برنامه‌ای ثمربخش و درازمدت یا مجموعه‌ای از حدسهای پربار)؛

(x) شم و ذائقهٔ قوی در ریاضیات (مثلاً یک هدف تحقیقاتی که ذاتاً جالب است و بر مباحث و مسائل مهم ریاضیات تأثیر دارد)؛

(xi) روابط عمومی خوب (مثلاً خوب ارائه کردن یک دستاورد ریاضی به غیر ریاضیدانها، یا دستاوردی از یک شاخه به دست‌اندرکاران شاخه‌های دیگر)؛

(xii) فراریاضیات خوب (مثلاً پیشرفتهایی در مبانی، فلسفه، تاریخ، و شیوه‌های استفاده از ریاضیات)؛

(xiii) ریاضیات دقیق و مشروح (ذکر تمام جزئیات به‌طور صحیح و دقیق و کامل)؛

(xiv) ریاضیات زیبا (مثلاً اتحادهای شگفت‌انگیز رامانوجان؛ حکمهایی که آسان (و زیبا) بیان می‌شوند ولی اثباتشان آسان نیست)؛

(xv) ریاضیات شسته‌رُفته (مثلاً اثبات ناب به مفهومی که پل اردوش در کتاب اثبات بیان کرده و رسیدن به نتیجه‌ای مشکل با حداقل تلاش)؛

(xvi) ریاضیات خلاق (مثلاً تکنیک، دیدگاه، یا نوعی از نتیجه که اساساً جدید و بدیع باشد)؛

(xvii) ریاضیات مفید (مثلاً لم یا روشی که در تحقیقات آینده بر روی موضوع مورد نظر نیز مکرراً به‌کار روند)؛

(xviii) ریاضیات قوی (مثلاً نتیجهٔ دقیقی که با مثالهای ناقضِ شناخته شده همسوست، یا رسیدن به نتیجه‌ای که به طرز غیرمنتظره‌ای قوی است از یک فرضیهٔ به ظاهر ضعیف)؛

(xix) ریاضیات عمیق (مثلاً رسیدن به نتیجه‌ای که آشکارا نابدیهی است مانند پی بردن به پدیده‌ای ظریف در ورای قلمرو و ابزارهای مقدماتی)؛

(xx) ریاضیات شهودی (مثلاً استدلالی که طبیعی و به آسانی قابل تصور است)؛

(xxi) ریاضیات فیصله‌بخش (مثلاً رده‌بندی همهٔ اشیا از یک نوع خاص، بیان نظر قطعی و نهایی در مورد یک موضوع ریاضی)؛

(xxii) و غیره و غیره[۱].

همان‌طورکه فهرست بالا نشان می‌دهد مفهوم کیفیت در ریاضیات، یک مفهوم چندبعدی و فاقد یک ترتیب کلی استاندارد و واضح است[۲].

به عقیدهٔ من علت این امر آن است که خود ریاضیات پیچیده و چندبعدی است و به شیوه‌ای انعطاف‌پذیر و پیش‌بینی‌ناپذیر رشد می‌کند. کیفیات فوق نمایانگر شیوه‌های مختلفی هستند که جامعهٔ ما از آن طرق ریاضیات را بهتر درک می‌کند و به‌کار می‌برد. به نظر نمی‌رسد اتفاق‌نظر عمومی در مورد اهمیت و ارزش این کیفیات در مقایسه با هم وجود داشته باشد. بخشی از این امر ناشی از ملاحظات تاکتیکی است: ممکن است رشتهٔ خاصی از ریاضیات در مرحله‌ای خاص از رشد خود یک رویکرد خاص را بهتر از رویکردی دیگر بپذیرد. بخشی از آن هم به ملاحظات فرهنگی برمی‌گردد: هر رشته یا مکتب خاصی از ریاضیات معمولاً ریاضیدانان همفکری را به خود جلب می‌کند که رویکردهای مشابهی به یک موضوع دارند. این تنوع همچنین نمایانگر تنوع قابلیتهای ریاضی است؛ ریاضیدانان مختلف در سبکهای ریاضی مختلفی استعداد پیشرفت دارند و برای انواع مختلفی از فعالیت ریاضی مناسب‌اند. (برای ملاحظهٔ بحثی در این مورد، رجوع کنید به [۱۲].)

به عقیدهٔ من این چندچهرگی و تنوع «ریاضیات خوب» برای کل ریاضیات مفید است، زیرا این امکان را فراهم می‌کند که رویکردهای مختلف به ریاضیات را بررسی کنیم و بتوانیم از انواع استعدادهای متفاوت در جهت هدف مشترک خود یعنی پیشبرد ریاضیات استفاده کنیم. هر چند عموماً می‌پذیرند که هر یک از صفات پیشگفته خصلت خوبی برای ریاضیات است ولی برای یک مبحث خاص، توجه به یکی دو تا از آن صفات به قیمت نادیده گرفتن بقیه ممکن است زیانبار باشد. به‌عنوان مثال وضعیتهای فرضی زیر را (که کمی هم اغراق‌آمیزند) در نظر بگیرید:

- مبحثی که دائماً بر نقش و نگار و ریزه‌کاریهای زیبای آن افزوده می‌شود یعنی نتایج به‌طور انفرادی و به خاطر خودشان تعمیم و پالایش می‌یابند اما کل موضوع بی‌هدف و بدون جهت مشخص رشد می‌کند.
- مبحثی که مملو از حدسهای حیرت‌انگیز است ولی هیچ امیدی به پیشرفت جدی در اثبات آنها نیست.
- مبحثی که در آن عمدتاً از روشهای موردی برای حل گردایه‌ای از مسائلی نامرتبط استفاده می‌شود که هیچ مضمون، رابطه، یا منظوری که آنها را زیر لوای واحدی در آورد، در کار نیست.
- مبحثی که بیش از حد خشک و نظری شده است و دائماً نتایج قبلی را تغییر شکل می‌دهد و در قالبهای صوری که مرتباً تکنیکی‌تر می‌شوند وحدت می‌بخشد بدون آنکه دستاورد جدید مهیجی به دنبال داشته باشد.
- مبحثی که نتایج کلاسیک را وازگونه می‌سازد و به اثبات همان نتایج به شیوه‌ای ساده‌تر و کوتاه‌تر می‌پردازد، اما به هیچ نوآوری اصیل یا نتیجه‌گیری تازه‌ای در ورای آنچه در نوشته‌های کلاسیک هست، راه نمی‌برد.

در هر یک از این موارد، مبحث مورد نظر ممکن است در کوتاه‌مدت فعالیت و پیشرفت زیادی داشته باشد ولی با این خطر روبه‌روست که اهمیت و مناسبت خود را در ریاضیات از دست بدهد و نتواند ریاضیدانان جوان را به سوی خود جلب کند. خوشبختانه بعید است یک مبحث ریاضی در چنین حالت ایستا و راکدی بماند زیرا به خاطر ارتباطش با سایر حوزه‌های ریاضیات (یا علوم مرتبط با آن) و مواجهه با (و احترام به) انواع گوناگون «ریاضیات خوب» دائماً مورد چالش قرار می‌گیرد و جان تازه می‌یابد. این سازوکار خوداصلاح‌کننده کمک می‌کند که ریاضیات به‌صورت متعادل، یکنواخت، یکپارچه، زایا و پرشور باقی بماند.

حال به سؤال دیگری که در بالا مطرح شد برمی‌گردیم: آیا اصلاً لازم است «ریاضیات خوب» را تعریف کنیم یا خیر؟ در این کار با خطر غرور و نخوت مواجه هستیم و ممکن است نتوانیم نمونه‌های نامتعارف پیشرفتهای اصیل ریاضی را تشخیص دهیم چرا که آنها خارج از قلمرو تعریفهای اصلی «ریاضیات خوب» قرار دارند[۳]. از طرف دیگر، خطری هم در جبههٔ مقابل وجود دارد و آن این است که فکر کنیم همهٔ رویکردها به ریاضیات به‌طور یکسان مناسب، و در مورد هر حوزهٔ ریاضی به یک اندازه مستحق تخصیص منابع‌اند[۴]، یا همهٔ دستاوردهای ریاضی به یک اندازه مهم‌اند. این موضع‌گیری‌ها ممکن است به خاطر اینکه حاکی از آرمان‌گرایی‌اند، تحسین‌برانگیز باشند، اما حس جهت‌یابی و هدف‌یابی را در ریاضیات تضعیف می‌کنند و یا حتی ممکن است منجر به تخصیص نابهینهٔ منابع شوند[۵]. واقعیت امر را باید جایی بین همهٔ اینها جستجو کرد. برای هر زمینهٔ ریاضیات، مجموعهٔ نتایج، باورهای عام، شهود و تجربیات (و یا فقدان آنها) نشان می‌دهد چه رویکردی ثمربخش‌تر است و ارزش آن را دارد که اکثر منابع به آن تخصیص یابد، کدام‌یک حدسی و نامطمئن است و فقط اقتضا می‌کند که معدودی ریاضیدان که مستقلاً می‌اندیشند آن را بررسی کنند تا همهٔ مبانی موضوع در نظر گرفته شود. به‌عنوان مثال، در حوزه‌های جا افتاده و رشدیافته پیگیری برنامه‌های نظام‌مند و ارائهٔ نظریه‌های کلی به شیوهٔ دقیق، با پیروی محتاطانه از روشهای مطمئن و برداشتهای شهودی تثبیت‌شده، معقول است، در حالی‌که در زمینه‌های جدید که هنوز کاملاً تثبیت نشده‌اند، بهتر است بر ارائهٔ حدسها و حل‌وفصل آنها، آزمودن رویکردهای گوناگون و تا حدی اتکا به قیاسها و روشهای اکتشافی نادقیق تأکید شود. بدین‌ترتیب از نظر تاکتیکی، معقول این است که حداقل یک اجماع نسبی در هر مبحث ریاضی در این‌باره وجود داشته باشد که چه کیفیاتی مهم‌تر است تا بدین‌ترتیب بتوان تدابیر هر چه مؤثرتری برای پیشرفت آن مبحث در هر مرحله از تکاملش اندیشید. کمبودهای حوزه‌های مختلف با یکدیگر متفاوت است: مثلاً ممکن است حوزهٔ خاصی بسیار نیازمند حل بعضی مسائل باشد و یا در حوزهٔ دیگر نیاز به چارچوبی نظری برای نظم بخشیدن به مجموعهٔ درهم‌ریختهٔ نتایج موجود یا برنامه‌ای گسترده یا رشته‌ای از حدسها باشد که به نتایج جدیدی بینجامد. حوزه‌های دیگر ممکن است از برهانهای جدید، ساده‌تر و مفهومی‌تر برای قضایای اساسی فایدهٔ بسیار ببرند، یا ممکن است در مورد حوزه‌ای لازم باشد برای جلب نظر و فعالیت بیشتر در آن حوزه، تبلیغات صحیح و معرفی شفاف صورت گیرد. بدین‌ترتیب، تعریف «ریاضیات خوب» برای هر حوزه از ریاضیات می‌تواند و باید بستگی زیادی به وضعیت خود آن مبحث داشته باشد. چنین تعریفی باید دائماً روزآمد شود و در معرض بحث و گفتگوی افراد داخل حوزه و ناظران خارجی باشد. همان‌طور که اشاره شد، می‌توان در مورد اینکه چگونه هر حوزهٔ ریاضی باید پیشرفت کند و متحول شود تا به تعادل داخل حوزه منجر شود، به اجماع و تفاهم رسید.

با توجه به مباحث فوق به نظر می‌رسد که مسألهٔ ارزیابی کیفیت ریاضی با وجود اهمیتش، در حد نومیدکننده‌ای پیچیده است، مخصوصاً به خاطر

اینکه بسیاری از دستاوردهای خوب ریاضی از برخی ویژگیهایی که در بالا برشمردیم در حد اعلا برخوردارند ولی ویژگیهای دیگر را ندارند. بسیاری از این کیفیات ذهنی هستند و ارزیابی دقیق آنها، مگر با نگاه به گذشته، دشوار است با این حال، پدیدهٔ قابل‌توجهی در این میان به چشم می‌خورد[۶] و آن این است که ریاضیات خوب به هر یک از معانی فوق، باعث ایجاد ریاضیاتی می‌شود که به بسیاری از معانی دیگر هم خوب است و این حدس را به میان می‌آورد که شاید علی‌رغم همهٔ این حرفها، یک مفهوم عام از ریاضیات خوب وجود داشته باشد و همهٔ معیارهای خاصی که در این مقاله به آنها اشاره شد، نمایانگر راههای متفاوتی برای کشف ریاضیات جدید یا مراحل و جنبه‌های گوناگون سیر رشد یک موضوع ریاضی باشند.

۲. بررسی موردی: قضیهٔ سمردی

حال از بحث کلی به سراغ یک مورد خاص می‌رویم و پدیده‌ای را که در پاراگراف پیشین ذکر شد با بررسی تاریخچه و زمینهٔ قضیهٔ سمردی[۳۲] روشن می‌سازیم. این قضیه بیانگر این حکم زیبا و مشهور است که هر زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح با چگالی (بالایی) مثبت لزوماً شامل تصاعدهای حسابی با طول دلخواه است من در اینجا از همهٔ جزئیات فنی صرف‌نظر می‌کنم و خوانندهٔ علاقه‌مند را به[۳۳] و مراجع ذکر شده در آنجا ارجاع می‌دهم.

چندین نقطهٔ شروع طبیعی برای این ماجرا وجود دارد. من با قضیهٔ رمزی[۲۳] آغاز می‌کنم: هر گراف کامل به‌قدر کافی بزرگ و رنگ‌آمیزی شده با تعداد متناهی از رنگها، شامل زیرگرافهای کامل بزرگ تکفام است. (مثلاً در میان شش فرد مفروض، یا سه نفر از آنها یکدیگر را می‌شناسند و یا سه نفر نسبت به هم غریبه‌اند، البته با فرض اینکه «شناختن یکدیگر» رابطه‌ای خوش‌تعریف و متقارن باشد.) این حکم، هر چند اثبات آن آسان است (به هیچ چیزی بیش از یک اصل لانهٔ کبوتر مکرر نیاز ندارد) ولی حاکی از کشف پدیدهٔ جدیدی بود و نوع جدیدی از حکمهای ریاضی را پدید آورد: قضیه‌های نوع رمزی، که هر یک از آنها، به‌صورتی، بیانگر این بینش تازه به‌دست آمده در ریاضیات است که بی‌نظمی کامل غیرممکن است.

یکی از نخستین قضیه‌های نوع رمزی (که در واقع چند سالی قبل از قضیهٔ رمزی عرضه شد) قضیهٔ وان در واردن[۳۷] است به این مضمون که به‌ازای هر رنگ‌آمیزی متناهی مفروض عددهای صحیح، یکی از رده‌های رنگی باید شامل تصاعدهای حسابی با طول دلخواه باشد. اثبات بازگشتی وان درواردن بسیار زیبا بود ولی عیبش این بود که کرانهای کمّی نامناسبی برای ظهور اولین تصاعد حسابی با طول مفروض به‌دست می‌داد؛ این کرانها در واقع متضمن یک تابع آکرمن با این طول و تعداد رنگ بود. اردوش و توران[۴] این شَم قوی ریاضی را داشتند که این مسئلهٔ کمّی را بیشتر تعقیب کنند[۷] و یکی از انگیزه‌های آنها هم تمایل به پیشروی در زمینهٔ اثبات این حدس بود که عددهای اول شامل تصاعدهایی به طول دلخواه‌اند. آنها سپس چند حدس قوی در پیش نهادند که یکی از آنها به قضیهٔ سمردی تبدیل شد و دیگری گزاره‌ای زیبا ولی قوی‌تر (و هنوز ثابت نشده) بود حاکی از آنکه هر مجموعه از عددهای صحیح مثبتی که عکسهای آنها مطلقاً مجموع‌پذیر نباشد شامل تصاعدهایی حسابی با طول دلخواه است.

نخستین پیشرفت در زمینهٔ این حدسها به‌دست آمدن یک رشته مثال ناقض بود که نقطهٔ اوج آن ساختمان زیبایی از یک مجموعهٔ نسبتاً تُنُک بود که برند عرضه کرد[۱] و تصاعد حسابی به طول ۳ نداشت (خصوصیت این مجموعه این است که چگالی‌اش در $\{1,\ldots,N\}$ به‌ازای هر ε مشخص به‌طور مجانبی بزرگ‌تر از $N^{-\varepsilon}$ است.) با ارائهٔ این ساختمان، بلندپروازانه‌ترین حدس از حدسهای اردوش-توران (مبنی بر اینکه مجموعه‌هایی که به‌طور چندجمله‌ای تُنُک هستند تصاعدهای بسیار دارند) از میدان خارج شد و در نتیجه، دستهٔ مهمی از رویکردهای مقدماتی به این مسائل (مثلاً روشهای مبتنی بر نابرابریهایی از قبیل نابرابریهای کوشی-شوارتس یا هُلدر) موضوعیت خود را از دست دادند. هر چند این مثالها مسئلهٔ مورد نظر را کاملاً حل و فصل نکردند، مسلماً نشان دادند که حدسهای اردوش-توران، اگر درست باشند، لزوماً اثباتی نابدیهی (و احتمالاً جالب) خواهند داشت.

پیشرفت مهم بعدی به‌دست روث[۲۷] حاصل شد که روش دایرهٔ هاردی-لیتلوود[۸] را همراه با روشی جدید (استدلال نمو چگالی) به‌نحوی بسیار ظریف برای اثبات قضیهٔ روث به‌کار برد: هر مجموعه از عددهای صحیح با چگالی مثبت شامل بینهایت تصاعد به طول سه است. پس از آن طبیعی بود که سعی کنند روشهای روث را در مورد تصاعدهای طویل‌تر تعمیم دهند. روث و دیگران سالها کوشیدند این کار را انجام دهند ولی موفقیت کامل به‌دست نیاوردند؛ تا مدتها بعد که گاورز دستاورد خود را عرضه کرد دلیل این ناکامی کاملاً شناخته نشد. اندره سمردی بود ([۳۱]، [۳۲]) که با نبوغ خیره‌کننده‌اش به روشهای ترکیبیاتی محض بازگشت (به‌خصوص، استدلال نمو چگالی را به سطوح جدیدی از پیچیدگی فنی ارتقا داد) تا قضیهٔ روث را نخست به تصاعدهای با طول چهار[۹]، و سپس به تصاعدهای با طول دلخواه تعمیم دهد و از این طریق قضیهٔ معروفش را ثابت کند. اثبات سمردی یک شاهکار تکنیکی بود و ایده‌ها و فنون تازهٔ متعددی را مطرح کرد که مهم‌ترین آنها راه جدیدی برای بررسی گرافهای فوق‌العاده بزرگ یعنی تقریب زدن آنها با مدلهای پیچیدگی کراندار بود. این نتیجهٔ مشهور و بسیار مفید که به لم نظم سمردی موسوم است در بسیاری سطوح قابل ملاحظه است. چنانکه در بالا اشاره شد، این قضیه دیدگاهی در مورد ساختار گرافهای بزرگ به‌دست می‌دهد که اساساً تازه است (به زبان امروزی، یک قضیهٔ ساختاری و نیز یک قضیهٔ کمال در مورد چنین گرافهایی است) و روش جدیدی برای اثبات (روش نمو انرژی) به‌دست می‌دهد که بعداً در این ماجرا نقشی حیاتی ایفا کرد. نتیجهٔ مزبور همچنین کاربردهای غیرمنتظرهٔ فوق‌العاده زیادی، از نظریهٔ گرافها تا آزمودن خاصیت در مورد ترکیبیات جمعی، دارد. ماجرای کامل این لم نظم متأسفانه طولانی‌تر از آن است که در اینجا شرح داده شود.

هر چند دستاورد سمردی بی‌تردید نقطهٔ اوجی در این ماجرای خاص است، به هیچ‌وجه آخرین حرف در این زمینه نیست. اثبات سمردی برای این قضیه هر چند مقدماتی است ولی خیلی ظریف و پیچیده است و درک آن آسان نیست. این اثبات مسئله‌های اولیه‌ای را هم که انگیزهٔ اردوش و توران درکار آنها در این زمینه بود کاملاً حل و فصل نمی‌کرد زیرا در خود اثبات، قضیهٔ وان در واردن در دو مرحلهٔ اساسی به‌کار رفته و بنابراین، کران کمّی بهتری برای آن قضیه به‌دست نمی‌دهد. بعداً، فورستنبرگ این شَم ریاضی را داشت که در جستجوی اثباتی اساساً متفاوت (و بسیار فراتر از سطح مقدماتی[۱۰]) برآید که مبتنی بر شباهتی روشنگر بین نظریهٔ ترکیبیاتی اعداد و نظریهٔ ارگودیک بود و پس از چندی، آن را به‌صورت اصلی بسیار مفید صورت‌بندی کرد که به اصل تناظر فورستنبرگ معروف شد. از این اصل[۱۱] می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که قضیهٔ سمردی

معادل با قضیهٔ بازگشتی چندگانه برای دستگاههای اندازه‌نگهدار است. سپس طبیعی به نظر رسید که این قضیه (که اکنون قضیهٔ بازگشتی فورستنبرگ نامیده می‌شود) مستقیماً با روشهایی از نظریهٔ ارگودیک و به‌خصوص با بهره‌گیری از رده‌بندیها و تجزیه‌های ساختاری متعددی (مثلاً تجزیهٔ ارگودیک) که برای چنین دستگاههایی موجود است، ثابت شود. فورستنبرگ پس از چندی قضیهٔ ساختاری فورستنبرگ را ثابت کرد که هر دستگاه اندازه‌نگهداری را به‌صورت گسترشی ضعیف‌ـآمیزنده از برجی از گسترشهای فشردهٔ یک دستگاه بدیهی توصیف می‌کرد، و بر اساس این قضیه و چند استدلال اضافی (از جمله، گونه‌ای از استدلال وان درواردن) توانست قضیهٔ بازگشتی چندگانه را ثابت کند و به این ترتیب، اثبات جدیدی از قضیهٔ سمردی به‌دست دهد. شایان ذکر است که فورستنبرگ کتابی عالی[۶] در این زمینه و مباحث وابسته نوشت که نظریهٔ اساسی مربوط را به‌طور نظام‌مند صورت‌بندی می‌کند و سهم بزرگی در رشد و پیشرفتهای بعدی در این زمینه داشته است.

فورستنبرگ و همکارانش بعداً تشخیص دادند که این روش جدیدٌ بالقوه بسیار نیرومند است، و می‌توان آن را برای اثبات انواع بسیار بیشتری از قضیه‌های بازگشتی به‌کار برد که سپس (از طریق اصل تناظر) به چند قضیهٔ ترکیبیاتی بسیار غیربدیهی می‌انجامد. فورستنبرگ، کاتسنلسون و دیگران با تعقیب این ایده بسیاری از گونه‌ها و تعمیمهای قضیهٔ سمردی را یافتند و مثلاً گونه‌هایی از آن را در ابعاد بالاتر به‌دست آوردند وحتی نوعی از قضیهٔ هیلز‌ـیوت[۱۸] در مورد چگلی را ثابت کردند (که تعمیمی بسیار نیرومند و انتزاعی از قضیهٔ وان درواردن است). حتی امروز معلوم نیست که بسیاری از نتایج حاصل از این تکنیکهای نامتناهی‌وار نظریهٔ ارگودیکٌ اثبات «مقدماتی» داشته باشند و این نشان‌دهندهٔ توان این روش است. به‌علاوه، درک بسیار عمیق‌تری از رده‌بندی ساختاری دستگاههای اندازه‌نگهدار به‌دست آمد که پیامد جانبی بر ارزش این تلاشهاست. به‌خصوص، معلوم شد که برای بسیاری از رده‌های مسئلهٔ بازگشتی، ویژگیهای بازگشتی مجانبی یک دستگاه دلخواه تقریباً به‌طور کامل به یک عامل خاص آن دستگاه وابسته است که عامل مشخصهٔ (مینیمال) آن دستگاه نامیده می‌شود[۱۲]. آنگاه تعیین دقیق این عامل مشخصه برای انواع مختلف بازگشت به یک موضوع اصلی مطالعه تبدیل شد زیرا تشخیص داده شد که این کار به کسب اطلاعات دقیق‌تری دربارهٔ رفتار حدی می‌انجامد (و به‌خصوص نشان می‌دهد که بعضی از عبارتهای مجانبی وابسته به بازگشت چندگانه واقعاً همگرا به یک حدند و این مسئله در استدلالهای فورستنبرگ حل‌وفصل نشده بود). مثالهای ناقضی که فورستنبرگ و وایس آوردند، و نیز نتایج کونتس و لزینی، سرانجام به این نتیجه‌گیری منتهی شد که این عاملهای مشخصه باید به‌وسیلهٔ یک نوع خیلی خاص (و جبری) دستگاه اندازه‌نگهدار، یعنی یک پوچ‌دستگاه وابسته به گروههای پوچ‌توان، قابل توصیف باشند؛ نقطهٔ اوج این نتایج، توصیفهای دقیق و موشکافانهٔ این عوامل در مقاله‌ای فوق‌العاده فنی از هوست و کرا[۲۰] (و بعداً درمقاله‌ای از زیگلر[۳۹]) بود که، علاوه بر چیزهای دیگر، مسئلهٔ پیشگفته دربارهٔ همگرایی متوسطهای بازگشت چندگانهٔ مجانبی را حل‌وفصل کرد. نقش اصلی که این عوامل دارند نشان‌دهندهٔ حضور آشکار یک وضعیت دوحالتی یعنی ساختار داشتن (به‌صورتی که پوچ‌دستگاهها معرفی می‌کنند)، و تصادفی بودن (که یک نوع فنی از ویژگی «آمیختن»، آن را متجلی می‌سازد) بود، و این بینش را به‌دست داد که در واقع، همین دوحالتی بودن زیربنای قضیهٔ سمردی و حکمهای وابسته به آن و منشأ قدرت آن است. جنبهٔ شایان ذکر دیگر از تحلیل هوست‌ـکرا ظهور چشمگیر متوسطهای وابسته به «مکعبها» یا «متوازی‌السطوح‌ها»ست که معلوم شده تحلیل آنها به دلایلی راحت‌تر از تحلیل متوسطهای بازگشت چندگانهٔ منسوب به تصاعدهای حسابی است.

به‌موازات این پیشرفتهای مبتنی بر نظریهٔ ارگودیک، سایر ریاضیدانان درصدد فهمیدن، اثبات مجدد، و اصلاح قضیهٔ سمردی از راههای دیگر بودند. یک پیشرفت مفهومی مهم به‌دست روسا و سمردی[۲۹] حاصل شد که از لم پیشگفتهٔ نظم سمردی برای اثبات چند حکم در نظریهٔ گرافها استفاده کردند، از جمله حکمی که امروز به لم برداشتن مثلث معروف است و اجمالاً حاکی از آن است که درگرافی که شامل تعداد کمی مثلث است می‌توان با برداشتن تعداد کمی یال همان تعداد مثلث را حفظ کرد. آنها سپس ملاحظه کردند که مثال برند که در بالا ذکر شد حدهایی در مورد کرانهای کمّی در این لم به‌دست می‌دهد و به‌خصوص دسته‌های متعددی از رویکردهای مقدماتی به این لم را از گود خارج می‌کند (زیرا چنین رویکردهایی نوعاً کرانهای چندجمله‌ای به‌دست می‌دهند)؛ در واقع تا به امروز همهٔ اثباتهای شناخته شدهٔ لم برداشتن ازگونه‌ای از لم نظم نتیجه می‌شود. با استفاده از عکس نقیض این استنتاج، مشاهده شد که لم برداشتن مثلث قضیهٔ روث را در مورد تصاعدهای با طول سه نتیجه می‌دهد. این کشف برای نخستین بار راه را بر اثبات قضیه‌های نوع سمردی از طریق تکنیکهای نظریهٔ گرافیِ صرف و تقریباً با نادیده گرفتن ساختار جمعی مسئله گشود. (توجه کنید که رهیافت مبتنی بر نظریهٔ ارگودیک هم این ساختار را، درکسوت کنش عملگر انتقال بر این دستگاه، حفظ می‌کند؛ همچنین، اثبات اولیهٔ سمردی فقط تا حدی مبتنی بر نظریهٔ گرافهاست زیرا از ساختار جمعی تصاعدها در بسیاری جاهای متفاوت بهره می‌گیرد.) با این حال مدتی طول کشید تا پی ببرند که روش نظریهٔ گرافی، مانند روش آنالیز فوریه‌ایِ قبل از آن، تا حد زیادی محدود به کشف الگوهای «با پیچیدگی کم» از قبیل مثلثها یا تصاعدهای به طول سه، بود وکشف تصاعدهایی با طول بیشتر نیاز به استفاده از نظریهٔ بسیار دشوارتر ابرگرافها داشت. به‌خصوص، این امر انگیزه‌ای شد که برنامه‌ای (با هدایت فرنکل و رودی) برای به‌دست آوردن حکمی مشابه لم نظم در مورد ابرگرافها اجرا شود، حکمی آنقدر قوی که نتایجی از قبیل قضیهٔ سمردی (و نیز تعدادی از گونه‌ها و تعمیمهای آن را به‌دست می‌دهد). این کار به طرز غیرمنتظره‌ای ظریف و پیچیده از آب درآمد، به‌خصوص، آرایش دقیق سلسله‌مراتب[۱۳] پارامترها در چنین تنظیمی به‌گونه‌ای که به‌ترتیب صحیح بر یکدیگر غلبه داشته باشند. در واقع، روایتهای نهایی لم نظم، و «لمهای شمارش» همراه آن، که قضیهٔ سمردی از آنها قابل استنتاج بود، در همین اواخر پیدا شده است ([۲۲]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۶]، [۱۴]، ...). همچنین مثال ناقض بسیار آموزنده‌ای ازگاورز[۱۵] شایان ذکر است که نشان می‌دهد کرانهای کمّی در لم نظم اولیه باید دست‌کم ماهیت برجی‌ـنمایی داشته باشند و بنابراین، بار دیگر ماهیت غیربدیهی (و توان) این لم را نشان می‌دهد.

رویکرد آنالیز فوریه‌ای به قضیهٔ سمردی که از زمان تحقیقات روث پیشرفت قابل‌ملاحظه‌ای نکرده بود، سرانجام با تجدید نظری که گاورز ([۱۱]، [۱۳]) در آن کارکرد وارد مرحلهٔ جدیدی شد. رویکرد آنالیز فوریه‌ای، مانند رویکردهای دیگر به این قضیه، مبتنی است بر در نظرگرفتن دو حالت برای مجموعه‌های

اعداد صحیح به این معنی که این مجموعه‌ها، به مفهومی، یا ساختاریافته‌اند یا شبه‌تصادفی. مفهوم ذی‌ربط ساختار در این مورد ساخته و پرداختهٔ روث است ـــ مجموعه‌های ساختاریافته باید یک نمو چگالی روی تصاعدهای حسابی با طول متوسط داشته باشند ـــ اما مفهوم صحیح شبه‌تصادفی بودن یا «یکنواختی» کمتر واضح بود. گاورز مثالی عرضه کرد (که در واقع ارتباط نزدیکی با مثالهای پیشگفتهٔ فورستنبرگ و وایس دارد) که نشان می‌دهد مفاهیم شبه‌تصادفی بودن بر اساس آنالیز فوریه برای کنترل تصاعدهای به طول چهار و بالاتر ناکافی است، و سپس به معرفی مفهوم جدیدی از یکنواختی (بسیار مربوط با متوسطهای مکعبی هوست و کرا و همچنین مفاهیم خاصی از نظم ابرگراف) پرداخت که کفایت می‌کرد. کار باقیمانده، برقراری صورتی کمّی و دقیق از افراز دو حالتی بود. این کار فوق‌العاده دشوار از آب درآمد (عمدتاً به خاطر کم‌فایدگی تبدیل فوریه در این حالت)، و از بسیاری لحاظ مشابه کارهای هوست‌ـکرا و زیگلر برای مجهز کردن عوامل مشخصه به ساختار جبری پوچ‌دستگاهها بود. ولی گاورز توانست با ترکیب ابزارهای آنالیز فوریه با نتایج مهمی از ترکیبیات جمعی از قبیل قضیهٔ فریمن و قضیهٔ بالوگ‌ـسمردی (که تاریخچهٔ آنها هم به‌خودی خود جالب است. مثلاً مراجعه کنید به [۳۵]) همراه با چند روش جدید ترکیبیاتی و احتمالاتی جدید به این هدف دست یابد که شاهکاری چشمگیر به‌شمار می‌آید، و به‌خصوص کرانهای کمّی بسیار قوی برای قضیهٔ سمردی و قضیهٔ وان دروازدن به‌دست آورد(۱۴).

خلاصه اینکه، چهار اثبات از قضیهٔ سمردی به‌دست آمده است، یکی با استفادهٔ مستقیم از ترکیبیات، یکی از طریق نظریهٔ ارگودیک، یکی به کمک نظریهٔ ابرگرافها، و یکی هم بر اساس آنالیز فوریه و ترکیبیات جمعی. با وجود این همه اثبات، باز هم احساس می‌شد که شناخت ما از این قضیه ناقص است؛ مثلاً هیچ‌یک از این رویکردها آنقدر نیرومند نبود که تصاعدهایی از عددهای اول را کشف کند و دلیل آن، عمدتاً، پراکندگی اعداد اول بود. (ولی با استفاده از روش فوریه، یا دقیق‌تر، روش دایرهٔ هاردی‌ـلیتلوود‌ـوینوگرادوف، می‌توان وجود بینهایت تصاعد به طول سه از اعداد اول [۳۶] را ثابت کرد، و با تلاش بسیار بیشتری می‌توان حکمی در مورد تصاعدهای به طول چهار داد [۱۹]). اما گرین [۱۵] با استفاده از ایده‌هایی از نظریهٔ تحدید در آنالیز همساز (که موضوع جذاب دیگری است که در اینجا دربارهٔ آن بحث نمی‌کنم) توانست عددهای اول را «چنانکه گویی» چگال هستند در نظر بگیرد و به‌خصوص صورت مشابهی از قضیهٔ روث را برای زیرمجموعه‌های چگال اعداد اول به‌دست آورد. به این ترتیب، راه بر نتیجه‌ای چشمگیر یعنی قضیهٔ سمردی نسبی گشوده شد که تصاعدهای حسابی را در زیرمجموعه‌های چگالِ مجموعه‌هایی بجز مجموعهٔ اعداد صحیح، مثلاً زیرمجموعه‌های چگال اعداد اول آشکار کرد. در واقع، نمونهٔ اولیه‌ای از قضیهٔ روث نسبی برای زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌های تصادفی کاملاً تنک قبلاً در متون نظریهٔ گرافها [۲۱] ظاهر شده بود.

من و بن گرین در تحقیقات مشترک خود(۱۵) شروع به آزمودن استدلالهای آنالیز فوریه‌ای و ترکیباتی نسبی گاورز در مورد چیزهایی از قبیل زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌های تصادفی یا «شبه‌تصادفی» تنک کردیم. پس از تلاش زیادی (تا حدی با الهام از صورتی از نظریهٔ ابرگرافها که برای شمارش الگوها در مجموعه‌های تنک مناسب است، و نیز تا حدی با الهام از «لم نظم حسابی» گرین [۱۶] که مفاهیم لم نظم از نظریهٔ گرافها را با مباحث جمعی وفق می‌داد) سرانجام توانستیم (در یک اثر انتشارنیافته) وجود تصاعدهای با طول چهار را در چنین مجموعه‌هایی کشف کنیم. در این مرحله به تشابه بین رویکرد لم نظم که ما از آن استفاده می‌کردیم و ساختمانهای عامل مشخصه در کار هوست‌ـکرا پی بردیم و با جانشانی(۱۶) در آن ساختمانها (به‌خصوص اتکای زیاد به متوسطهای مکعبی) توانستیم یک قضیهٔ سمردی نسبی را ثابت کنیم که رضایت‌بخش و متکی بر یک اصل انتقال خاص بود. مضمون این قضیه، به تسامح، چنین است که زیرمجموعه‌های چگال مجموعه‌های شبه‌تصادفی تنک چنان رفتار می‌کنند که «گویی» در فضای اولیه چگال‌اند. برای کاربرد این قضیه در مورد عددهای اول، لازم بود این عددها را در مجموعه‌ای که به طرز مناسبی شبه‌تصادفی باشد (یا دقیق‌تر، یک اندازه) قرار دهیم؛ ولی از بخت خوب ما، دستاوردهای اخیر(۱۷) گُلدستن و ییلدیریم [۸] در مورد شکافهای بین عددهای اول(۱۸)، آنچه را برای این منظور لازم داشتیم تقریباً به‌طور دقیق فراهم کرده بود و به ما امکان داد بالاخره این حدس قدیمی را ثابت کنیم که سلسلهٔ اعداد اول شامل تصاعدهای حسابی با طول دلخواه است.

ماجرا به همین‌جا ختم نمی‌شود بلکه در چندین جهت ادامه دارد. از طرفی اکنون تعدادی کاربرد دیگر از اصل انتقال پیدا شده است، مانند به‌دست آوردن خوشه‌هایی از اعداد اول گاوسی یا تصاعدهای چندجمله‌ای از اعداد اول گویا. مسیر نویدبخش دیگری از تحقیق، همگرایی روشهای فوریه، ابرگراف، و نظریهٔ ارگودیک به یکدیگر است، مثلاً همگرایی در پروراندن روایتهای نامتناهی‌وار از نظریهٔ گرافها و ابرگرافها (که کاربردهایی در سایر مباحث ریاضیات از قبیل آزمودن خاصیت دارد) یا روایتهای متناهی‌وار از نظریهٔ ارگودیک. یک مسیر دیگر، ساختن پوچ‌دستگاههایی است که بازگشت را در وضعیت نظریهٔ ارگودیک کنترل کنند، و همچنین متوسطهای متناهی‌وار مختلفِ مربوط به تصاعدهای حسابی را کنترل کنند. به‌خصوص، گرین و من سخت روی محاسبهٔ همبستگیها بین عددهای اول و دنباله‌های تولیدشده به‌وسیلهٔ پوچ‌دستگاهها (با استفاده از روشهایی که سابقهٔ آنها به وینوگرادوف می‌رسد) کار می‌کنیم تا روابط مجانبی دقیق‌تری را در مورد الگوهای گوناگونی که می‌توان در اعداد اول یافت ثابت کنیم. آخرین نکته، که کم‌اهمیت‌تر از بقیه نیست، موضوع حدس اردوش‌ـتوران است که علی‌رغم همهٔ این پیشرفتها حل‌وفصل نشده است هر چند بورگن ([۲]، [۳]) به دستاوردهای بسیار نویدبخشی در این مورد نایل شده که به احتمال قوی به پیشرفتهای دیگری خواهد انجامید.

۳. نتیجه‌گیری

چنانکه از بررسیِ موردیِ فوق مشهود است، بهترین نمونه‌های ریاضیات خوب آنهایی نیستند که صرفاً در یک یا چندتا از معیارهای کیفیت ریاضی که در فهرست صدرِ این مقاله آمد صدق می‌کنند، بلکه آنهایی هستند که جزئی از یک ماجرای ریاضی مهم‌ترند که ادامه می‌یابد و نمونه‌های متعدد دیگری از انواع ریاضیات خوب پدید می‌آورد. در واقع، تاریخچهٔ حوزه‌های کاملی از ریاضیات را می‌توان چنین تصویر کرد که آن حوزه‌ها عمدتاً از دلِ چند تا از این ماجراهای بزرگ، تحول و تکامل آنها طی زمان، و تأثیرات آنها بر یکدیگر به‌وجود آمده‌اند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که ریاضیات خوب فقط با یک یا چند تا از کیفیات «موضعی» پیشگفته (هر چند البته مهم و شایستهٔ بحث و بررسی‌اند) محک زده نمی‌شود بلکه همچنین به‌این پرسش «کلی»تر وابسته

است که آن جزء مورد بحث از ریاضیات تا چه حدی با اجزای دیگر ریاضیات خوب توافق دارد، خواه از این لحاظ که در تشکیل دستاوردهای قبلی نقش داشته یا مشوق پیشرفتهای آتی است. البته، بدون استفاده از شیوهٔ نگرش به گذشته مشکل بتوان با قطعیت پیش‌بینی کرد که چه انواعی از ریاضیات چنین خاصیتی دارند. ولی به نظر می‌رسد احساس تعریف‌ناپذیری وجود داشته باشد مبنی بر اینکه فلان جزء از ریاضیات، «دلالت به چیزی دارد»، یعنی جزئی از یک معمای بزرگ‌تر است که باید در مورد آن کندوکاو بیشتری شود، و به نظر من پیگیری چنین نویدهای ملموسی دربارهٔ امکانات آتی حداقل همان‌قدر در پیشرفت ریاضی اهمیت دارد که جنبه‌های مشخص و واضحی از کیفیت ریاضی که در بالا ذکر شد. بنابراین، به عقیدهٔ من، ریاضیات خوب صرفاً فرایند حل مسأله، ساختن نظریه، کوتاه‌تر کردن، قوی‌تر کردن، واضح‌تر کردن، زیباتر کردن، یا دقیق‌تر کردن استدلالها نیست هر چند همهٔ اینها البته هدفهای تحسین‌برانگیزی هستند؛ در حین انجام دادن همهٔ این کارها (و بحث دربارهٔ اینکه کدام‌یک در هر مبحث مفروضی اولویت بیشتری دارد)، همچنین باید به هر چارچوب و زمینهٔ بزرگ‌تری که نتایج حاصل را بتوان در آن قرار داد، توجه داشت زیرا چنین‌کاری [قرار دادن نتایج در قالب وسیع‌تر] ممکن است بیشترین فایده را برای آن نتیجه، آن مبحث، و کل ریاضیات در پی داشته باشد.

یادداشتها

۱. منظور من در اینجا ارائهٔ یک فهرست جامع و کامل نبوده است. به‌خصوص، در این فهرست عمدتاً نوعی از ریاضیات مد نظر است که در مقالات تحقیقاتی ریاضی دیده می‌شود نه ریاضیاتی که در کتابهای درسی می‌آید یا مقالاتی که در رشته‌های نزدیک ریاضیات، مانند علوم طبیعی، نوشته می‌شود.

۲. به‌خصوص، باید یادآور شد که دقت ریاضی هر چند بسیار مهم است، تنها بخشی از ویژگی ریاضیات خوب است.

۳. یک مشکل مرتبط با این مسأله این است که صرف‌نظر از دقت ریاضی، که یک استثنای مهم است، بیشتر کیفیتهای فوق تا حدی ذهنی هستند و شامل نوعی عدم دقت و عدم قطعیت ذاتی. از گیل کالای (Gil Kalai) به خاطر تذکرش در این زمینه سپاسگزاریم.

۴. نمونه‌هایی از این منابع کمیاب اینها هستند: پول، دقت، توجه و تمرکز، شم و قریحه، و صفحات مجله‌های سطح بالا.

۵. یک راه‌حل دیگر مسأله استفاده از این امر است که منابع ریاضی خود چندبعدی هستند. مثلاً می‌توان جوایز جداگانه‌ای برای شرح و توصیف، برای خلاقیت، و غیره، تخصیص داد، و یا مجلات و نشریات مختلفی برای دستاوردهای مختلف داشت. در این مورد نیز از «گیل کالای» تشکر می‌کنیم.

۶. این پدیده تا حدی هم به «کارایی نامعقول ریاضیات» مربوط می‌شود که ویگنر به آن اشاره کرده است [۳۸].

۷. اردوش همچنین مسألهٔ کرانهای کمّی برای قضیهٔ اصلی رمزی را پیگیری کرد و این امر، علاوه‌بر چیزهای دیگر، به پایه‌ریزی روش فوق‌العاده مهمی به نام روش احتمالاتی در ترکیبیات انجامید، ولی این خودش ماجرای کاملی است که در اینجا فرصت پرداختن به آن را نداریم.

۸. تاریخچهٔ روش دایره هم ماجرای بزرگ دیگری است که در اینجا به جزئیات آن نمی‌پردازیم. کافی است بگوییم که این روش، به زبان امروزی، بخشی از یک دیدگاه متعارف است حاکی از اینکه آنالیز فوریه ابزار مهمی برای پرداختن به مسائلی در ترکیبیات جمعی است.

۹. مدت کوتاهی بعد، روث [۲۸] توانست با ترکیب بعضی از ایده‌های سمردی با روش تحلیلی خودش، برهان آمیخته‌ای برای قضیهٔ سمردی در مورد تصاعدهای با طول چهار به‌دست آورد.

۱۰. برای نمونه، بعضی از گونه‌های استدلال فورستنبرگ وابستگی زیادی به اصل موضوع انتخاب دارد هر چند این استدلال را می‌توان به شکلی عرضه کرد که فارغ از این اصل موضوع باشد.

۱۱. همچنین اصل تناظر مشابهی وجود دارد که قضیهٔ وان درواردن را با یک قضیهٔ بازگشت چندگانه برای دستگاههای دینامیکی توپولوژیک یگانه می‌سازد. این تناظر به موضوع جالب دینامیک توپولوژیک می‌انجامد که متأسفانه امکان بحث آن در اینجا نیست.

۱۲. یکی از نمونه‌های اولیهٔ آن، قضیهٔ ارگودیک میانگین فون نویمان است که در آن عامل توابع انتقال‌ـناوردا رفتار حدی متوسطهای سادهٔ انتقالها را کنترل می‌کند.

۱۳. این سلسله‌مراتب با برجهای گسترشهایی که فورستنبرگ در تلاش مشابه برای «منظم‌سازی» یک دستگاه اندازه‌نگهدار با آنها روبه‌رو شد مرتبط به نظر می‌رسد هر چند این ارتباط تاکنون کاملاً شناخته نشده است.

۱۴. همچنین اثبات بسیار خلاقانهٔ شلاه از قضیهٔ وان درواردن [۳۰] شایان ذکر است که رکورد قبلی بهترین ثابتها را برای این قضیه حفظ کرد؛ ایده‌های موجود در اثبات شلاه هنوز به‌طرز موفقیت‌آمیزی در بقیهٔ موضوع جا نگرفته‌اند ولی من انتظار دارم که این کار در آینده عملی شود.

۱۵. ضمناً من در ابتدا به خاطر ارتباط این مسائل با یک ماجرای ریاضی مهم دیگر یعنی حدس کاکیا مجذوب این مسأله‌ها شدم که در اینجا امکانی برای بحث دربارهٔ آن ندارم. ولی این حدس به‌نحو شگفت‌انگیزی با نظریهٔ تحدید که قبلاً ذکر شد ارتباط دارد.

۱۶. این کار به دلایلی پر دردسر بود و بیشتر از همه به این دلیل که ساختمانهای مبتنی بر نظریهٔ ارگودیک ماهیتاً نامتناهی‌وار بودند در حالی‌که وقتی با اعداد اول سروکار داریم لازم است در یک چارچوب متناهی کار کنیم. خوشبختانه، من قبلاً سعی در متناهی‌سازی رویکرد ارگودیک به قضیهٔ سمردی کرده بودم [۳۴]؛ هر چند آن کار در آن زمان ناقص بود، معلوم شد مایهٔ کافی دارد تا در مورد اعداد اول به‌کار رود.

۱۷. در زمانی که ما مقالهٔ خود را می‌نوشتیم، ساختمانی را که به‌کار می‌بردیم از یک مقالهٔ گولدستن و ییلدیرم گرفته بودیم. این مقاله به خاطر خطایی نامربوط به‌این موضوع پس گرفته شده بود و بالاخره با بهره‌گیری از ایده‌های جدید هوشمندانه‌ای از پینتس [۹]، مقاله تصحیح شد. این موضوع مؤید نکته‌ای است که قبلاً خاطر نشان شد و آن اینکه یک دستاورد ریاضی لازم نیست از لحاظ همهٔ جزئیات دقیق باشد تا برای کارهای (دقیق) آتی ارزشمند باشد.

۱۸. موضوع شکافهای بین اعداد اول هم موضوع جالبی است که باز در اینجا جایی برای پرداختن به آن نداریم.

مراجع

1. F. A. Behrend, *On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression*, Proc. Nat. Acad. Sci. **32** (1946), 331-332.

2. J. Bourgain, *On triples in arithmetic progression*, Geom. Func. Anal. **9** (1999), 968-984.

3. J. Bourgain, *Roth's theorem on arithmetic progressions revisited*, preprint.

4. P. Erdős, P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 261-264.

5. H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204-256.

6. H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton NJ 1981.

7. H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 527-552.

8. D. Goldston, C. Yildirim, *Small gaps between primes I*, preprint.

9. D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yildirim, *Small gaps between primes II*, preprint.

10. T. Gowers, *Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma*, Geom. Func. Anal. **7** (1997), 322-337.

11. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four*, Geom. Func. Anal. **8** (1998), 529-551.

12. T. Gowers. *The two cultures of mathematics*, in: Mathematics: Frontiers and Perspectives, International Mathematical Union. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, Editors. American Mathematical Society, 2000.

13. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Func. Anal. **11** (2001), 465-588.

14. T. Gowers, *Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs*, Combin. Probab. Comput. **15** (2006), no. 1-2, 143-184.

15. B. J. Green, *Roth's theorem in the primes*, Math. **161** (2005), 1609-1636.

16. B. J. Green, *A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups*, Geom. Func. Anal. **15** (2005), no. 2, 340-376.

17. B. J. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, to appear, Ann. Math.

18. A. W. Hales, R. I. Jewett, *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 222-229.

19. D. R. Heath-Brown, *Three primes and an almost prime in arithmetic progression*, J. London Math. Soc. (2) **23** (1981), 396-414.

20. B. Host, B. Kra, *Non-conventional ergodic averages and nilmanifolds*, Annals of Math. **161** (2005), 397-488.

21. Y. Kohayakawa, T. Luczak, V. Rödl, *Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set*, Acta Arith. **75** (1996), no. 2, 133-163.

22. B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht, *The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs*, preprint.

23. F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (1930), 264-285.

24. V. Rödl, M. Schacht, *Regular partitions of hypergraphs*, preprint.

25. V. Rödl, J. Skokan, *Regularity lemma for k-uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms, **25** (2004), no. 1, 1-42.

26. V. Rödl, J. Skokan, *Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms, **28** (2006), no. 2, 180-194.

27. K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 245-253.

28. K. F. Roth, *Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions*, IV. Period. Math. Hungar. **2** (1972), 301-326.

29. I. Ruzsa, E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai **18** (1978), 939-945.

30. S. Shelah, *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 683-697.

31. E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969), 89-104.

32. E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 299-345.

33. T. Tao, *The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes*, to appear, ICM 2006 proceedings.

34. T. Tao, *A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem*, preprint.

35. T. Tao and V. Vu, *Additive Combinatorics*, Cambridge Univ. Press. 2006.

36. J. G. van der Corput, *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Ann. **116** (1939), 1-50.

37. B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. **15** (1927), 212- 216.

38. E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960).

* * * * * *

• Terence Tao, "What is good mathematics?", arXiv: math. HO/ 0702396v1

اصل این مقاله قرار است در بولتن انجمن ریاضی آمریکا (AMS) به چاپ برسد.

• ترنس تائو، دانشگاه کالیفرنیا در لوس‌آنجلس، آمریکا

ترجمهٔ فائزه محبی، سیامک کاظمی