صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات*

(۱)

آرتور جفی

در سال ۱۹۸۴ «بنیاد ملی علوم» در ایالات متحدهٔ آمریکا کمیته‌ای برای بررسی وضع ریاضیات در آن کشور تشکیل داد. ریاست کمیته با ادوارد دیوید بود که از مشاوران کاخ سفید و رئیس بخش تحقیقات کمپانی اکسون است. نتیجهٔ بررسیهای این کمیته به‌گزارش دیوید معروف شده است. انتشار این گزارش موجب افزایش حمایتهای مادی و معنوی از آموزش و پژوهش ریاضی در آمریکا شده است. مقاله‌ای که در زیر می‌خوانید ترجمهٔ یکی از پیوستهای این گزارش است که به‌علت طولانی‌بودن آن، در چند شماره خواهد آمد.

۱. ریاضیات

ریاضیات هنری است باستانی، و از همان آغاز از جملهٔ ذهنیترین و درعین‌حال عملیترین تلاشهای آدمی به‌شمار آمده است. از ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد، بابلیها در زمینهٔ خواص تجریدی اعداد به‌پژوهش پرداختند، و در یونان دوران تمدن آتن، هندسه درحوزهٔ فعالیتهای ذهنی انسان بلندترین جایگاه را از آن خود کرد. ریاضیات، درکنار این جنبه‌های ادراکی‌نظری، به‌صورت ابزاری که‌هر روز برای مساحی زمین، دریانوردی، و ساختن بناهای بزرگ مورد نیاز بود، شکوفا شد. مسائل عملی و پیامدهای نظری یکدیگر را برانگیختند؛ تفکیک این دو رشته همواره ناممکن بوده است.

امروزه نیز وضع به‌همین منوال است. درقرن بیستم، دامنه وتنوع ریاضیات گسترش یافته وپیچیدگی و تجرید آن عمق پیدا کرده‌است. این رونق ناگهانی پژوهشهای ریاضی چندان ژرف بوده است که ممکن است حوزه‌هایی از ریاضیات برای افراد عامی ــ و در موارد زیادی حتی برای ریاضیدانانی که در زمینه‌های دیگری کار می‌کنند ــ نامفهوم به نظر برسد؛ علی‌رغم این روند به سوی تخصصی شدن ــ و در واقع به علت آن ــ ریاضیات بیش از هر زمان دیگری ملموس شده و نقش حیاتی یافته است.

در ربع قرن گذشته، ریاضیات و روشهای ریاضی به جزء لاینفک، فراگیر، و اساسی علوم، تکنولوژی، و تجارت تبدیل شده است. در جامعهٔ ما که تکنولوژیگراست، بیسوادی جای خود را به‌ناتوانی در درک یا به‌کارگیری ریاضیات» که نمایانگر یک شکاف آموزشی است، سپرده است. می‌توان سهم ریاضیات را در جامعهٔ تکنولوژیک ما با نیاز موجود زنده به هوا و غذا مقایسه کرد. در واقع، می‌توان گفت که ما درعصر ریاضیات زندگی می‌کنیم ــ فرهنگ ما «ریاضی‌سازی» شده است. هیچیک از آثار ریاضیات در پیرامون ما شگفتی‌آفرینتر از این کامپیوتری که درهمه‌جا حضور دارد، نیست؛ به‌چند نمونهٔ معدود تأثیر کامپیوتر بر زندگی خود نظر می‌کنیم؛

هواپیمایی. هم‌اکنون هواپیماهای خطوط هوایی تجاری می‌توانند درفرودگاهها فرود آیند بدون آنکه خلبان حتی ابزار کنترل را لمس کند. داده‌هایی در خصوص سرعت و موضع هواپیما به‌طور خودکار برای دستگاهی به نام پالایهٔ کالمن ـ باسی[1] رله می‌شود. این دستگاه با پیدا کردن پیوستهٔ «بهترین برازش با روش کمترین مربعها» برای تقریب مرتبهٔ اول قوانین فیزیک نیوتنی، هواپیما را به پرواز درمی‌آورد. «پالایه‌های حالتی» مشابه، موشکها وفضاکاوها وماهواره‌های ردیاب را راهنمایی می‌کنند. این‌ماهواره‌ها وموشکها عکسهای مهمی را به‌زمین مخابره می‌کنند، که از طریق «تجزیهٔ طیفی» با کامپیوتر آنها را واضحتر و روشنتر می‌کنند.

پزشکی. نمونه‌گیری بزرگ مقیاس داده‌ها، پژوهشهای پزشکی را برای‌یافتن همبستگی بیماریها با الگوهای سبک زندگی وتغذیه امکان‌پذیر می‌سازد؛ از این‌رو، تحلیل داده‌ها بررسی عامی از واگیرشناسی (اپیدمیولوژی) را ممکن می‌سازد. کامپیوترها با تدارک تجزیهٔ خودکار خون و ادرار و نیز برش‌نگاری (توموگرافی) (به‌کمک کامپیوتر (سی‌تی‌اسکن)[2] از اندامهای درونی، انقلابی در تشخیص بیماریها برپا کرده‌اند. کامپیوترها به‌زودی قادر خواهند بود با انجام آزمونهای ساده، و آزمونهایی که نیاز به‌عمل جراحی (بردن دستگاهها به درون بدن) ندارند، خطر بیماریهایی را ده تا بیست سال زودتر پیشگویی کنند.

تجارت. روش سادکی (سیمپلکس) در برنامه‌ریزی خطی، با ساده کردن محاسبهٔ کارامدترین تخصیص منابع، امر تولید، ساخت، کنترل موجودی وتوزیع‌محصولات صنعتی را دگرگون کرده است. ظرفیت دستیابی و ذخیرهٔ بلوکهای بزرگ داده‌ها، نگهداری سوابق، صدور صورتحساب، حسابداری، و مانند آنها را به‌کلی تغییر داده است.

این کاربردهای بسیار گوناگون کامپیوتر ــ پالایهٔ کالمن ـ باسی، واضح‌سازی تصاویر به‌کمک تجزیهٔ طیفی، آمار پزشکی، سی‌تی‌اسکن‌کننده‌ها، و تحلیل برنامه‌ریزی خطی ــ چه نقطهٔ مشترکی‌دارند؟ هریک ازآنها عمدتاً بر جبرخطی استواراست؛ جبرخطی حوزه‌ای‌از ریاضیات است که در اواخر قرن نوزدهم به وجود آمد و در آن زمان هیچیک از این کاربردها به فکر کسی هم نیامده بود: انگیزهٔ تکامل این‌شاخه

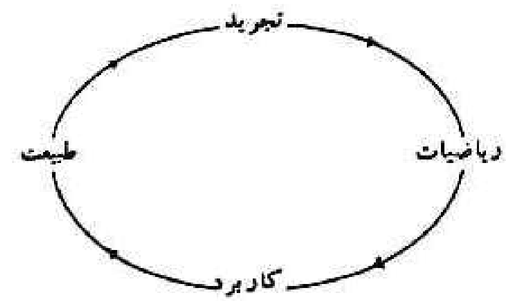
1. Kalmam-Bucy   2. CT scan

ازجبر از تلاش برای فهم هندسهٔ فضای n بعدی منشأ می‌گرفت.

اعمال بخشی از این ایده‌ها در خلال همین قرن ــ به‌دست کسانی بااستعداد استثنایی در ریاضیات ــ انجام شد. وانگهی، هریك از این کاربردها متضمن داده‌های چندان زیادی‌اند که حتی سریعترین کامپیوترها نمی‌توانند تنها باجستجوی کورکورانه به‌پاسخهای لازم دست یابند. اینها به ابداع و بهره‌گیری از روشهای پیچیدهٔ ریاضی نیز نیاز داشتند.

می‌توانیم برای مستند کردن ارزش انتفاعی پژوهشهای ریاضی برای جامعهٔ خود ونمایاندن چگونگی نفوذ ایده‌های خاص ریاضی بر جهان خویش، چندین جلد کتاب بنویسیم. اما، چند مورد معدود را برگزیده‌ایم تا توان و ژرفای بسیاری از شاخه‌های فرعی را که از ریاضیات مشتق شده‌اند، نشان دهیم . هدف دیگری هم داریم که شاید مهمتر ازگزارشی ساده در خصوص برخی از پیشرفتها درجبههٔ مقدم ریاضیات و علوم باشد. می‌خواهیم بر دو موضوع که بارها و بارها درمسیر تاریخ پیش می‌آیند، تأکید ورزیم.

۱. ریاضیات عالی، هرچند تجریدی، به‌کاربردهای عملی درطبیعت منجرمی‌شود. مسائل مشکلی که درطبیعت پیش می‌آیندابداع ریاضیات نوینی را برمی‌انگیزند.



می‌توان ازهرسویی به این چرخهٔ تجرید وکاربرد عملی وارد شد. فاصلهٔ زمانی بین پیدایش ریاضیات تجریدی تا کاربردهای عملی بسیارگوناگون است. گاهی بی‌واسطه وآنی است؛ گاهی هم یك قرن‌طول می‌کشد تا نظریهٔ تجریدی از طریق کاربردهای عملیش انقلابی بر پا کند. در بسیاری موارد ، مقیاس زمانی چیزی بین این دوحالت است.

۲. پیشگویی این نکته که حوزه‌ای ازریاضیات دقیقاً در کجاسودمند خواهد بود نامکن است. حتی مبدعین بسیاری از ایده‌های ریاضی هم غالباً ازکاربردهای آن ایده‌ها به شگفت آمده‌اند. تنها چیزی که می‌توانیم با قطعیت بیان کنیم این است که زمانه به کسی که مدعی باشد «ــ هرگز کاربرد عملی نخواهد یافت» پندی سزاوار خواهد داد. مثلاً، هاردی[1]، ریاضیدان بزرگ انگلیسی ، در اثرش، به نام اعتذار یك ریاضیدان[2]، می‌نویسد که به‌خاطر زیبایی ریاضیات به آن پرداخته است، نه به‌خاطر ارزش عملیش. او با بی‌پروایی بیان می‌کند که هیچگونه کاربردی برای نظریهٔ اعداد یا نسبیت نیافته است. از آن زمان تنها چهل سال گذشته است که پیامد های نظریهٔ تجریدی اعداد به آنجا کشیده شده که برای امنیت ملی مفید واقع می‌شود؛ خصیصهٔ اعداد اول شالودهٔ طرحهای نوینی را برای ساختن رمزهای سری تشکیل می‌دهد. درخلال چندسال، اختراع دستگاههای شکافت و گداخت [هسته‌ای] ، نظریات هاردی را در مورد نسبیت ابطال کرد.

1. G.H.Hardy 2. *A Mathematician's Apology*

ممکن است حیرت‌آور باشدکه تجریدی‌ترین حوزه‌های‌ریاضیات ــ هندسه، نظریهٔ اعداد، منطق ــ اهمیت عملی بسیاری داشته باشند. د. ا. کنوث[1]، یکی از دانشمندان علوم‌کامپیوتری، می‌گوید: «هرمطلب اندکی هم که از ریاضیات می‌دانم به‌نحوی در کاربردی عملی مرا یاری رسانیده است.»

اویگن ویگنر[2] نیز یکدان از «تأثیر گذاری بی حدوحساب‌ریاضیات بر علوم طبیعی» در شگفت است . مطمئناً تمایل شدید ریاضیدان در این است که همه‌چیز را جزجنبهٔ اساسی مسأله کناربگذارد، تا دیدگاه مشترکی را بیابد که از آن، دومسألهٔ ظاهراً متفاوت درارتباط نزدیك با یکدیگر قرارمی‌گیرند. اما این مطلب توضیحی‌کافی ارائه نمی‌دهد که‌چرا، درمواردی بسیار، ریاضیات تجریدی‌که به‌خاطر زیبایی‌خود تکامل یافته است، چند دهه بعد، توانسته است طبیعت را به‌تمامی توصیف کند.

اندرو گلیسون[3] ریاضیدانی از دانشگاه هاروارد پاسخ خود را چنین ارائه می‌دهد: «ریاضیات علم نظم است ــ موضوع آن یافتن، توصیف و درك نظمی است که‌در وضعیتهای ظاهراً پیچیده نهفته‌است. ابزارهای اصولی ریاضیات مفاهیمی‌اندکه ما را قادر می‌سازند این نظم را توصیف‌کنیم. دقیقاً به خاطر آنکه ریاضیدانان قرنها در جستجوی کارامدترین مفاهیمی بوده‌اند که نمونه‌های مبهم نظم را توصیف کنند، ابزارهایشان برای جهان بیرونی کاربردپذیر است ؛ زیرا دنیای واقعی نمونهٔ کوچکی از وضعیتی پیچیده است که درآن نظم فراوانی وجود دارد.»

یك‌دلیل دیگر ارائه می‌کنیم. ایده‌های ریاضی ازذهن پژوهشگران نمی‌رویند. تاریخ نشان می‌دهد که ریاضیات غالباً الهام خود را از الگوهای طبیعت می‌گیرد. درسهایی که از یك برخورد با طبیعت فرا می‌گیریم وقتی پدیدهٔ طبیعی دیگری راکشف می‌کنیم، همچنان به کارمان می‌آیند.

دلایل اهمیت ریاضیات برای جامعه هرچه باشند، فهم چگونگی پیشرفت ریاضیات پیامدهایی تعیین‌کننده دارد. باید چگونگی پیشبرد ریاضیات عالی دراین کشور [امریکا] به بهترین وجه ، و چگونگی حفظ رهبری‌که درچهل سال‌گذشته به‌دست آمده، ارزیابی شود. ما به دو اصل اساسی اعتقاد داریم:

تحقیقات ریاضی باید تا حد ممکن گسترده و نومایه و با اهداف دراز مدت باشد. انتظار داریم تاریخ تکرار شود؛ براین گمانیم که ژرفترین و سودمندترین کاربردهای آیندهٔ ریاضیات را امروز نمی‌توان پیشگویی کرد، زیرا این‌کاربردها برپایهٔ ریاضیاتی استوارخواهد بود که هنوز کشف نشده است.

درحالی که سمت و سوی اکثر پژوهشهای ریاضی متوجه فهم و درك مسائل شناخته شده است، باید به یاد داشته باشیم که جهت خود ریاضیات همواره درحال‌تغییراست. ریاضیدانان با استعدادباید به پیگیری پژوهشهایی ترغیب شوند که مناسبت آنها را با خیلی‌کم می‌فهمیم یا اصلاً نمی‌فهمیم اما ممکن است سرانجام به دیدگاههای نو، یا به ابداع حوزه‌های نوین ریاضیات بینجامند.

ما درچهل سال گذشته یك دوران طلایی ریاضیات را تجربه کرده‌ایم. معلوم شده است که هرشاخهٔ فرعی ریاضیات، گویی باجادو، به شاخه‌های فرعی دیگر، وبه بسیاری کاربردها در علوم طبیعی و مهندسی ارتباط پیدا کرده‌اند. این بافتهٔ سخت به هم پیوسته نه تنها هیجان‌انگیز است، بلکه توصیف پژوهشها و کاربردهای اخیر ریاضی

1. D.E.Knuth 2. Eugene Wigner 3. Andrew Gleason

را به‌صورت دائرةالمعارفی [مختصر و گسسته] ناممکن می‌سازد، و هرگونه نمودار سازمانی ساده‌ای که از آنها به دست دهیم، نادقیق خواهد بود.

انتخاب مثالهای زیر از جانب ما ضرورتاً مربوط به طرز تفکر شخصی، و متأثر از میزان آگاهی وسلیقهٔ ماست. آنها را به تسامح در چهار حوزه ـ محاسبه، فیزیک، ارتباطات، ومهندسی ـ مطرح کرده‌ایم؛ هرچند این مثالها ازمرزهای مشخص این حوزه‌ها به‌راحتی فراتر می‌روند. براین نکته آگاهیم که بربسیاری از حوزه‌ها و پیشرفتها چشم پوشیده‌ایم. علی‌رغم این چشمپوشیها، اطمینان داریم که مثالهای ما ماهیت ریاضیات را به‌عنوان یك كل آشكار می‌سازند.

پیش ازآنکه به‌این کاربردها بازگردیم، می‌خواهیم سرگذشت یك مبحث ـ آنالیزفوریه ـ را بازگوییم و چگونگی تکامل آن را در خلال ۱۷۰ سال حکایت کنیم. این داستان نشان می‌دهد که غالباً ریاضیات چگونه به چیزی بسیارمهمتر از آن مسألهٔ ویژه‌ای که‌حلش مورد نظربوده است، تبدیل می‌شود.

آنالیزفوریه

در اوایل دههٔ ۱۸۰۰، ژان باپتیست ژوزف فوریه[1]، که به تازگی از مقام حکمرانی مصر درزمان ناپلئون [به فرانسه] بازگشته بود، برآن شدکه مسألهٔ رسانش گرما را درك كند. اومی‌خواست به این پرسش پاسخ دهد که: با فرض آنکه دمای اولیه در تمامی نقاط یك ناحیه معلوم باشد، گرماچگونه درطی‌زمان درسرتاسرآن ناحیه پخش‌خواهد شد؟ کنجکاوی درخصوص پدیده‌هایی مانند دمای جو وآب وهوابود که فوریه را به طرح این پرسش تجریدی کشاند.

فوریه، به منظورحل مسألهٔ پخش‌گرما، روش ریاضی ساده ـ اما تابناکی ـ را ابداع کرد. معلوم شد که اگر توزیع گرمای اولیه نوسانی ـ یعنی، اساساً موجی سینوسی ـ باشد، حل این مسأله ساده است. فوریه، با استفاده از این موضوع به‌این نتیجه رسیدکه بایدهر توزیع‌گرمای اولیه بەمجموعی (احتمالاً نامتناهی) از امواج‌سینوسی تجزیه و آنگاه هریك از این مسأله‌های ساده را حل کرد. بنابراین جواب‌عمومی مسأله ازطریق جمع کردن جوابهای هریك ازمؤلفه‌های نوسانی، به‌نام همساز، به‌دست می‌آمد.

ریاضیدانان فرانسوی، مانند لاگرانژ، با ابراز تردید نسبت به این نکته‌که این‌همسازهای ساده بتوانند به‌طوردلبسته‌ای‌تمامی توابع‌ممکن را بیان کنند، این ایده‌ها را به سختی رد کردند، و دقت و زحمت فوریه را به باد دشنام گرفتند. این حملات به‌مدت دو دهه همچنان متوجه فوریه بود، و او در خلال این مدت تحقیقات خود را با بصیرتی قابل ملاحظه دنبال می‌کرد. امروزه به‌ثبات قدم، سرسختی، و قدرت عمل او، علی‌رغم تردیدهای سهمناك در اذهان رهبران‌جامعهٔ علمی، دین فراوانی داریم. فوریه حتی پس از آنکه درسال ۱۸۱۱ جایزهٔ بزرگ ریاضی را به‌خاطر مقاله‌اش دربارهٔ مسألهٔ رسانش‌گرما از فرهنگستان علوم دریافت داشت، انتشار کارخود را مشکل یافت، زیرا فرهنگستان در حکم اعطای جایزه دربارهٔ عمومیت و دقت روش فوریه تردیدهای سختی قائل‌شده‌بود. فوریه استقامت کرد وسرانجام کارش درپی انتشار اثرش، نظریهٔ تحلیلی‌گرما، درسال ۱۸۲۲، اثری که هم‌اکنون کلاسیك شده است، مقبولیت عام یافت.

روش آنالیز همساز یا آنالیز فوریه، در واقع اکنون در هر زمینهٔ ریاضیات و علوم فیزیکی اهمیت زیاد خود را نمایان کرده است ـ اهمیتی بسیارفراترازحل مسألهٔ‌پخش گرما. درحوزهٔ‌ریاضیات، این‌مبحث به‌خودی‌خود به‌یك‌موضوع [مستقل]تبدیل شده است. درنظریهٔ‌معادلات دیفرانسیل، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ احتمال، نظریهٔ‌آمار، هندسه، نظریهٔ اعداد، وبسیاری دیگر،روش‌فوریه را برای تجزیهٔ توابع به‌بسامدهای اساسیشان به‌کار می‌برند.

درفیزیك، مهندسی، و علوم‌کامپیوتری تأثیر آن به همان ژرفاست. فوریه تأثیر روش خود را در پیشگفتارش بر نظریهٔ تحلیلی‌گرما چنین‌پیشگویی می‌کند: «مطالعهٔ عمیق طبیعت بارورترین مرحلهٔ‌کشفیات ریاضیات‌است. این‌روش مطمئنی است برای... کشف... عناصربنیادیی که درتمامی پدیده‌های طبیعت مجدداً بەوجود می‌آیند.» فوریه، عملاً یکی ازتواناترین ابزارها را برای فیزیك ریاضی تدارك كرد. به محض آنکه‌ماکسول در ۱۸۷۳ امواج الکترومغناطیسی را بامعادلات مشهورش تشریح کرد، آنالیز فوریه به‌یکی از روشهای کلیدی‌مطالعهٔ این امواج و مؤلفه‌های هماهنگ‌آن ـ پرتوهای ایکس، نورمرئی، میکروموجها، امواج رادیویی، ومانند آنها ـ تبدیل شد. هم اکنون بسیاری از دستگاههای الکتریکی والکترونیکی برشالودهٔ آنالیزفوریه استوارند، از جمله دستگاههای جدید مانند طیف‌نگارهای تشدید مغناطیسی هسته‌ای و طیف‌نگارهای بلورنگاشتی پرتو ایکس. در قرن اخیر، آنالیز فوریه زمینهٔ درك اساسی نظریهٔ کوانتومی ـ و از این رو درك تمامی فیزیك و شیمی نوین ـ را فراهم آورده است.

ایدهٔ تجزیهٔ داده‌ها به مؤلفه‌های دوره‌ای نیز درمهندسی نقش‌عمده دارد. این ایده به تبدیل لاپلاس انجامید، که هردانشجوی مهندسی این تبدیل را به‌عنوان روش استانده مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل خطی می‌آموزد. آنالیز فوریه به آنالیز سریهای زمانی منجر شد که در اکتشاف نفت ـ از طریق تفسیر امواج زلزله‌ای فرستاده شده درمیان صخره‌هایی که‌گمان می‌رود حاوی نفت باشند ـ به‌کار می‌رود.

ظهور کامپیوتر اخیراً استفاده از آنالیز فوریه را به طور عددی به‌صورت جزئی عادی از تحلیل داده‌ها امکان‌پذیر ساخته است. کامپیوتر توانسته است تجزیهٔ صوت به مؤلفه‌های هماهنگ آن و امکان تولید و بازشناسی سخن آدمی را فراهم آورد. انجام عملیاتی مشابه بر روی عکسها ـ مثلاً، تصاویر ماهواره‌ای ازنواحی مختلف زمین ـ به کامپیوتر این امکان را می‌بخشد که «برفك» آن را حذف و بدنشان تصویر را واضح کند یا بر روشنی آن بیفزاید.

حتی اموریپش‌پا افتاده،مانندضرب دو عدد، را می‌توان با استفاده از تبدیلات فوریه بسیار سریعتر از روش سنتی که درکلاسهای دبستان‌آموزش داده می‌شود، به‌انجام رسانید. این روش ارقام اعداد را به‌صورت یك تابع مورد نظرقرارمی‌دهد، که می‌تواند به یك‌سری فوریه بسط داده شود. درمورد اعداد ۱۰۰۰ رقمی، روش فوریه می‌تواند تا ۵۰ بار سریعتر از الگوریتمی باشد که با آن آشناتریم؛ و البته این روش درطراحی کامپیوتر به‌کار می‌رود.

کاری که مسؤول رمز نیروی دریایی با تبدیل فوریه انجام می‌دهد تنها به خاطر روشهای ظریفی که در ریاضیات به منظور محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ دنبالهٔ اعداد ـ الگوریتمهایی که رویهمرفته تبدیلهای فوریهٔ سریع (FFT) نام دارند ـ کشف شد، امکان‌پذیر است. ایدهٔ این الگوریتمها درکار رانگ[1] وکونیگ[2] در ۱۹۲۴ بنیاد گرفت؛ هرچند هستهٔ اولیهٔ این روش شاید به یك قرن پیش به‌کار گاوس برگردد. پس‌ازانتشار مقالهٔ کولی[3] وتاکی[4]، درسال ۱۹۶۵، این روش

---

1. Jean Baptiste Joseph Fourier

---

1. Runge
2. König
3. Cooley
4. R. Tukey

کاملاً شناخته شد و کاربرد عام یافت، و گاروین[1]، رادنیك[2]، گود[3]، وینوگراد[4] و سایرین در آن اصلاحات گوناگونی انجام دادند.

محاسبهٔ مستقیم تبدیل فوریه با n عدد نیازمند حدود n^2 عمل است. تبدیل فوریهٔ سریع یافتن پاسخ را در تقریباً $n\log n$ مرحله میسر می‌سازد ــ که به‌ازای مقادیر بزرگ n کاهشی بزرگ است. بدون این اصلاح، کامپیوترها هرگز نمی‌توانند بسیاری ازمسائل را «بیدرنگ» تحلیل کنند ــ یعنی، پاسخها را با همان آهنگی به‌دست دهند که داده‌ها جریان دارند و بدینسان ازتنگناهای بسیاری پرهیز شود. (معلوم شده که تعیین مدت زمان دقیقی که برای انجام تبدیل فوریهٔ سریع لازم است مسألهٔ مشکلی است، که به‌برخی قضایای ژرف ناشی از نظریهٔ تحلیلی اعداد دربارهٔ توزیع اعداد اول، وابسته است.)

کاربردهای بیشمار آنالیز فوریه درعلوم ومهندسی دست‌کم تاحد کاربرد آن در خود ریاضیات مهم است. ریاضیدانان، مانند سایر دانشمندان پیوسته در جستجوی ابزارهای نوینی برای حل مسائل نظری‌خویش‌اند. بارها پیش می‌آید که روشهای کشف شده برای حل مسأله‌ای تجریدی، بعداً درگسترهٔ وسیعی از مسائل دیگر به‌کارمی‌آید.

برای روشن‌شدن مطلب، خوب‌است درکتابخانهٔ علوم یك دانشگاه درفهرست برگه‌ای آن به عنوان «فوریه» نگاهی بیندازید. مثلاً، درکتابخانهٔ هاروارد، ۲۱۲ مدخل وجود دارد، که ده‌تای اول آنها عبارت‌اند از: آنالیزفوریه درنظریهٔ احتمال، آنالیز فوریه درچندین متغیر مختلط، آنالیز فوریهٔ سریهای زمانی، آنالیزفوریهٔ اندازه‌های بیکران در گروههای آبلی موضعاً فشرده، آنالیزفوریه در گروهها و آنالیز موجی جزئی، آنالیز فوریهٔ میدانهای موضعی، آنالیز فوریهٔ فضاهای ماتریسی، ضرایب فوریهٔ اشکال خودریخت (اتوموروف)، انتگرال فوریه وکاربردهای آن، و عملگرهای انتگرال فوریه و معادلات دیفرانسیل جزئی.

درقرن گذشته سری فوریه روحی درجان سریهای دیریکله وریمان دمید، و این سریها سرانجام به Lـ سریها، که امروزه مورد مطالعه است، انجامید. این ایده‌ها نظریهٔ اعداد را با نظریهٔ نمایشهای گروهها یکی کرده است. آنالیز فوریه به تعریف فضاهای تابعی (مانند فضاهای سوبولف[5]، فضاهای شوارتس، فضاهای توزیعی، و فضاهای هاردی) انجامیده که شالودهٔ آنالیز تابعی نوین را تشکیل می‌دهند. در این چهارچوب می‌توانیم‌معادلات دیفرانسیل (هم خطی‌وهم غیرخطی) و تعمیم نوین آنها ــ معادلات شبه‌دیفرانسیل ــ و عملگرهای انتگرال فوریه را تحلیل کنیم. با این روشها می‌توان ماهیت وانتشار تکینیها را مطالعه کرد.

هرچند فوریه خود اهمیت روشش را باز می‌شناخت ــ چنانکه دو دهه در برابر انتقادها استقامت کرد ــ هرگز نمی‌دانست که ابداعش تا چه میزان پربار خواهد بود. در حالی که هیچ پیشرفت جدیدی در ریاضیات از این نفوذ جدی آنالیز فوریه برخوردار نبوده است، اما الگوی اساسی همچنان یکسان و بی‌تغییر مانده است، تأثیر ایده‌های خوب ریاضی تادوردستها و در راستاهایی غیرمنتظره گسترش می‌یابد.

۲. محاسبه

شاید برجسته‌ترین کاربرد ریاضی این قرن پیشرفت حسابگر الکترونیکی بوده است. کامپیوتر اینك در دفاتر کار، مدارس، و کارخانه‌ها به وسیله‌ای ضروری بدل شده و درخانه‌ها نیز به سرعت به وسیله‌ای عادی تبدیل می‌شود. نکتهٔ اساسی این‌بخش بازنمودن این مطلب است که انقلاب کامپیوتری صرفاً یك انقلاب مهندسی نیست. این‌یك‌انقلاب ریاضی‌است، زیرا منشأ ایده‌های اختراع و کاربرد روزانهٔ کامپیوتر، ریاضیات پیچیده است.

کامپیوترها دستخوش دو محدودیت بنیادی‌اند. هرچند سریعترین کامپیوترها می‌توانند میلیونها عمل دریك ثانیه اجرا کنند، با این حال همیشه بسیار کندند. این هم ظاهراً یك پارادوکس است، اما جان کلام اینجاست: هرچه کامپیوترها بهتر وبزرگترشوند، دانشمندان ومهندسان حل مسائل بیشتر و بزرگتری را از آنها توقع دارند. هرکه بامش بیش برفش بیشتر. وقتی میزان داده‌های مسأله‌ای را دوبرابر می‌کنید، تعداد مراحل مورد نیاز برای محاسبهٔ جواب غالباً چهاربرابر، یا هشت برابر، یا شانزده برابر می‌شود. دربسیاری موارد، زمان محاسبه جدیترین محدودیت‌درپیشرفت کاراست. دوبرابر کردن سرعت‌کامپیوتر درهر چند سال، تنهابه‌این معنی است‌که توانایی حل مسائل‌بزرگتری را ۱۰ الی ۲۰ درصد افزایش دهند، که غالباً هم به این میزان دست پیدا نمی‌کنند. توانایی بخشیدن به کامپیوتر جهت انجام محاسبهٔ مورد نیاز رهیافت ریاضی کاملاً نوینی را ایجاب می‌کند.

محدودیت دوم کامپیوترها ناشی از ماهیت رقمی آنهاست، زیرا بیشتر ریاضیاتی که بستر علم را تشکیل می‌دهد پیوسته است. تقریب زدن جواب مسأله‌ای پیوسته با ماشینی گسسته مهارت زیادی راطلب می‌کند. بیشتر محاسبات علمی به پاسخ پرسشهایی از این دست وابسته است: چه‌روشهای ریاضی درپس یك جواب عددی ارائه شده نهان است؟ چون کامپیوتر با اعداد با طول ثابت کار می‌کند (و درنتیجه، خطای ناشی از گردکردن دارد)، آیا انباشته شدن خطاها به خطای فاحش در جواب منجر می‌شود؟ آیا از تقریبهای دیگر نیز چنین خطاهایی حاصل می‌شود؟ اگرچنین نیست، برای دستیابی به‌یك‌درجه دقت‌مطلوب، یك‌محاسبهٔ رقمی‌چه‌مدتی طول می‌کشد؟ بازهم‌ریاضیدان باید همواره دیدگاههای‌نوینی را برای بهبود روش‌کامپیوتردرانجام محاسبه ارائه دهد.

بدینسان ریاضیات درکانون محاسبه قرار دارد. حال سرگذشت ریاضیات وکامپیوتر را از آغاز بیان می‌کنیم.

خود کامپیوتر

امروزه به سادگی می‌توان فراموش کرد که کامپیوتر همه منظوره محصول بسیارجدیدی است. تاپنجاه‌سال پیش، منظورازماشین‌محاسبه، ماشینی بود که برای انجام برخی اعمال اصلی به‌کار می‌رفت. در قرن پانزدهم غیاث‌الدین جمشیدکاشانی ریاضیدان‌قرن پانزدهم‌ایرانی ماشین حسابی را برای محاسبهٔ خسوفهای ماه، وماشین حساب‌دیگری را برای تجسم و نمایاندن موضع‌ستارگان ساخت. ویلیام شیکارف[1]، بلزپاسکال، و ویلیام لایب‌نیتس‌همگی ماشینهایی برای‌انجام عمل‌جمع و تفریق خودکارساختند؛ چارلز بیبج[2] به خاطرماشین تحلیلی‌اش‌مشهور بود. برای محاسبهٔ مساحت زیریك منحنی مسطح، ژ هـ هرمان[3]، جیمز ـ کلرك ماکسول، وجیمز تامسون هریك صفحه سنجهایی را ابداع کردند که نوع دیگر کامپیوتر قیاسی (آنالوگ) بود. اما، یك ماشین تك، و عام که برای تمام مسائل وتمام محاسبات مناسب باشد از منبعی سر بر آورد که ظاهراً کمترین احتمال به آن می‌رفت. آن منبع مبحث مشکل منطق ریاضی است.

---

1. Garwin 2. Rudnick 3. Good 4. Winograd 5. Sobolev

1. Schikarf 2. Babbage 3. J.H.Hermann

منطق و کامپیوتر

بنیانهای ریاضیات بر پایه‌های منطق استوارند. قرنها، ریاضیدانان بر این اعتقاد بودند که استدلال قیاسی هرگز نمی‌تواند به نتایج ناسازگار بینجامد. این نوع تعقل مرسوم را در سال ۱۹۰۳ پارادوکسهای مشهور برتراند راسل، و آلفرد نورث وایتهد، مورد تردید قرار دادند. مثلاً، اگر S مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی باشد که شامل خودشان نیستند، آیا S شامل خودش هست؟

در حدود ۱۹۱۵، دیوید هیلبرت نیز به تدوین برنامه‌ای برای اصلاح بنیانهای ریاضیات دست زد. در ۱۹۲۷، جان فون نویمان، یکی از همکاران جوان هیلبرت، مقالهٔ مشهوری منتشر کرد که در آن حدس می‌زد منطق ریاضی بزودی از هر تناقض ممکنی پالوده خواهد شد. با همهٔ اینها، تنها سه سال بعد بود که، کورت گودل اثبات کرد حتی حساب ساده هم شامل «گزاره‌های تصمیم ناپذیر» است، جمله‌هایی که صدق و کذب آنها را نمی‌توان ثابت کرد. روش او همچنین نشان می‌دهد که اثبات سازگاری منطقی ریاضیات ناممکن است. معلوم شد که پاسخهای این پرسش ظاهراً ذهنی، ثمرات عملی بسیار زیادی دارند.

در ۱۹۳۶، آلن تورینگ[1] و امیل پست[2] مستقل از هم دریافتند که این پرسش هم‌ارز آن است که کدام دنباله‌های از ۰ و ۱ را می‌توان به کمک یک ماشین تجریدی و با مجموعه‌ای متناهی از دستورالعملها بازشناخت؛ آنان این گونه اتوماتون را جعبهٔ سیاه ساده‌ای می‌دانستند که نواری برای نوشتن و خواندن نمادها دارد. تورینگ و پست قضیهٔ شگفت‌آوری را درخصوص اتوماتونها اثبات کردند: علی‌الاصول، باید یک «اتوماتون عمومی» وجود داشته باشد که بتواند هر دنباله را که با اتوماتون دیگری قابل تشخیص باشد، بازشناسد. یعنی، این ماشین عمومی می‌تواند ــ با دنباله‌ای متناهی از دستورالعملها ــ کارکرد ویژهٔ هر ماشین خاصی را تقلید کند.

در واقع تولد کامپیوتر عمومی همین‌جا بود. چرچ[3]، کلینی[4]، و سایرین، ایده‌های منطقی بیشتری را پی گرفتند. اما این جان فون نویمان، ریاضیدان بزرگ بود که دانست اتوماتون عمومی را چگونه به‌صورت یک حسابگر الکترونیکی (کامپیوتر) با دستورالعملهای ذخیره شده ــ «برنامه‌ای» که خود ماشین می‌توانست به‌هنگام محاسبه تغییر دهد ــ درآورد. فون نویمان و همکارانش آنگاه کار تکنیکی جاودان خود را که برای تبدیل امری نظری به واقعیت ضروری بود، به عهده گرفتند. در خلال یک دهه، ابزارهایی مانند انیاک[5] فون نویمان، در انستیتوی مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون، که خودش در آنجا کار می‌کرد، ساخته شد. در هیچ لحظه‌ای از سالهای اولیهٔ این قرن هیچ کس حدس نمی‌زد که آن مناظرهٔ ذهنی پیرامون بنیادهای منطق ریاضی مآلاً به کجا می‌انجامد.

الگوریتم و پیچیدگی محاسبه

پیشتر به یکی از مسائل اصلی محاسبه اشاره کردیم: با رشد ابعاد مسائل محاسباتی، زمان و حافظهٔ مورد نیاز برای حل آنها با سرعت بیشتری رشد می‌کند. در نخستین روزهای تولد کامپیوتر و محاسبات کامپیوتری، ریاضیدان می‌بایست درستی و سرعت یک برنامه را با آزمودن آن در ورودیهای مختلف، با توجه به زمان حافظهٔ مورد نیاز، بررسی کند. موانع این روش نه چندان کارامد آشکارند. برای اجتناب از آنها، ریاضیدانان بر شالودهٔ کار تورینگ و پست الگوهای نظری محاسبه را بنا کرده‌اند تا بیازمایند که یک الگوریتم به چند عمل نیاز دارد. آنان دریافتند که بهتر است به‌جای تلاش در حل هر مسألهٔ جدید با شیوه‌ای خاص و مربوط به موضوع، مجموعه‌ای از روشهای ریاضی اساسی ابداع شوند تا بتوانند به صورت سنگهای زیربنا برای الگوریتمهای بسیار به کار روند.

مثلاً، به یک کار معمولی که یک کامپیوتر باید چندین بار انجام دهد توجه کنید: n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را درنظر می‌گیریم؛ می‌خواهیم آنها را به‌ترتیب صعودی بنویسیم. ساده‌ترین روش چنین است:

۱. a_1 را بنویس.

۲. بررسی کن که آیا a_2 کوچکتر از a_1 است یا خیر؛ اگر چنین است، آن را سمت چپ a_1 بنویس. در غیر این صورت، a_2 را در سمت راست a_1 بنویس.

۳. بررسی کن که a_3 از کوچکترین عددی که تاکنون نوشته شده کوچکتر است یا خیر. درصورت مثبت بودن پاسخ آن را در سمت چپ بنویس، درغیر این‌صورت آن را با عدد بعدی مقایسه کن، اگر کوچکتر است، آن را درسمت چپ و اگر بزرگتر است آن را در سمت راست بنویس.

۴. این فرایند را به‌ازای $a_4, a_5, \ldots, a_n$ ادامه ده.

معیار خوبی برای زمان موردنیاز انجام این الگوریتم تعداد مقایسه‌هایی است که باید انجام شود. اگر اعداد در ابتدا ترتیبی نزولی داشته باشند، این مدت زمان باید $n^2/2$ باشد. این را پیچیدگی بدترین‌حالت الگوریتم می‌نامند. اگر ترتیب این اعداد تصادفی باشد، می‌توان $n^2/4$ مقایسهٔ ضروری را انتظار داشت، که پیچیدگی حالت میانگین نام دارد. این نکته که زمان موردنیاز متناسب با n^2 زیاد می‌شود، محدودیت واقعی برای بزرگی فهرستی است که می‌توان عملاً مرتب کرد. از ضریب ویژهٔ ۱/۲ یا ۱/۴ معمولاً چشم‌پوشی می‌شود و متخصصین کامپیوتر می‌نویسند که زمان این الگوریتم $O(n^2)$ است، که نمایشگر این نکته است که زمان اجرا از مرتبهٔ n^2 است.

باید بگوییم که پیچیدگی بدترین حالت و حالت میانگین یک الگوریتم ممکن است به طور محسوسی فرق داشته باشد. الگوریتم مشهور سادکی (سیمپلکس) برای برنامه‌ریزی خطی در بدترین حالت می‌تواند به تابعی نمایی از اندازهٔ مسأله نیاز داشته باشد. اما، این بدترین‌حالتها معدود و نادرند؛ بورگوارد[1] و اسمیل[2] در ۱۹۸۲ ثابت کردند که برای نوع دیگری از این مسأله، این الگوریتم به‌طور متوسط به‌زمانی از مرتبهٔ درجهٔ دوم اندازهٔ مسأله نیاز دارد.

در واقع، روش بسیار سریعتری برای مرتب کردن اعداد، بر پایهٔ اصل بازگشت، وجود دارد: تقسیم اعداد به دو گروه مساوی؛ مرتب کردن هر گروه؛ سپس ادغام این دو فهرست مرتب‌شدهٔ شامل $n/2$ عدد. برای مرتب‌کردن هر یک از گروههای شامل $n/2$ عدد، از همان روش استفاده می‌کنند: آنها را در دو گروه شامل $n/4$ عدد مرتب می‌کنند؛ این اعداد را مرتب و سپس فهرستها را ادغام می‌کنند. هر یک از گروههای با اندازهٔ $n/4$ از طریق تقسیم آن به گروههایی با اندازهٔ $n/8$ مرتب می‌شود و به همین ترتیب تا آخر. زمان انجام این فرایند $O(n \log n)$ است، و بنابراین هنگام مرتب کردن ۲۵۶ عدد، این روش ۶۴ بار سریعتر از روش قبلی است.

اصل بازگشت در بسیاری از مسائل دیگر نیز به‌خوبی اعمال می‌شود. کامپیوترها همواره ماتریسهای بزرگ را ــ مثلاً، در انجام تحلیل آماری داده‌ها ــ ضرب می‌کنند. روش استاندهٔ دبیرستانی برای ضرب

---

1. Alan Turing 2. Emil Post 3. Church 4. Kleene
5. ENIAC

---

1. Borgwardt 2. Smale

کردن ماتریسهای $n \times n$ نیازمند زمان $O(n^3)$ است. اما، به‌کمك تدبیرهایی می‌توان ضرب ماتریسهای 2×2 را به‌جای ۸ عمل ضرب با ۷ عمل ضرب انجام داد. با شکستن ماتریسهای بزرگ به پاره‌های کوچکتر و کوچکتر به‌طور بازگشتی می‌توان از این مزیت برای مسائل کوچك بهره گرفت و به الگوریتمی برای ضرب ماتریسها دست یافت که با زمان $O(n^{2.82})$ انجام می‌شود.

افزون بر روش بازگشت، بسیاری روشهای مفید دیگر نیز، ازجمله «ساختار داده‌ها»، برای سامان بخشیدن محاسبات وجود دارند. مثلاً، تمامی مثالهایی که در پیشگفتار این مقاله برشمردیم ــ پالایهٔ کالمن ـ باسی، واضح کردن تصویر، سی‌تی‌اسکن کننده‌ها، برنامه‌ریزی خطی، و آمار پزشکی ـ به‌استفاده از کامپیوتر برای حل دستگاه n معادلهٔ خطی n متغیری وابسته‌اند. درنتیجه، به این الگوریتمها توجه زیادی معطوف شده است. روش کلاسیك حذفی گاوس، زمان $O(n^3)$ می‌برد. اما، در بسیاری ازمسائل مهم ــ بارزتر ازهمه روشهای عنصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل یا برخی مسائل مقادیر ویژه ــ که برای شبیه‌سازیهای کامپیوتری هوا، پرواز فضایی، طراحی صنعتی، ومانند آنها ضروری است ، در ضرایب معادلات صفرهای زیادی پیدا می‌شود، که توزیع آنها دارای الگویی‌منظم است. ریاضیدانان برای دستیابی به‌الگوریتمهای سریعتر از این ساختار بهره گرفته‌اند. این الگو را می‌توان به یك‌گراف برگرداند (ساختاری‌متشکل از نقاط و یالهایی که‌آنهارا بهم وصل می کنند.) و از این گراف به‌نوبهٔ خود می‌توان برای ابداع نظمی کارامد به منظور انجام روش حذفی گاوس سود جست. نتیجهٔ کارالگوریتمی است که زمانی که می‌برد تنها $O(n^{3/2})$ است ــ صرفه‌جویی عمده درعملی که باید هزاران‌بار انجام شود . اخیراً، معلوم شده است که این روش همچنین به الگوریتمی با زمان $O(n^{3/2})$ برای ماتریسهایی که گرافهایشان را می‌توان در یك صفحه رسم کرد، تعمیم پیدا می کند.

درحالی که الگوریتمهای بسیاری بر مفاهیم ریاضی نسبتاً مقدماتی متکی‌اند، سه الگوریتم اخیر از قضایای عمیقی متعلق به شاخه‌های بسیار گوناگون بهره می گیرند تا به مسائل محاسباتی مشکل راه پیدا کنند. معلوم شده است که برخی نتایج نسبتاً ذهنی، پیامدهای محاسباتی کاملاً عملیی در آزمودن اعداد اول، بازشناسی گراف، و برنامه‌ریزی با اعداد صحیح داشته‌اند.

اعداد اول بزرگ پایهٔ یك‌طرح رمزنگاری‌نوین‌را تشکیل‌می‌دهند. اما تا همین اواخر، آزمودن اینکه آیا عددی ۶۰ رقمی اول است یا خیر خارج ازحوزهٔ توانایی حتی سریعترین کامپیوترها بوده است. ساده‌ترین‌آزمون ــ وارسی تمامی اعداد صحیح تا ریشهٔ دوم عددمورد نظر برای دریافتن اینکه آیا آنها مقسوم‌علیه هستند یا خیر ــ نیازمند وارسی 10^{30} عدد است. (در اینجا 10^{30} نماد علمی برای عددی است متشکل از یك و سی صفر در سمت راست آن.) اما، کارشناسان نظریهٔ اعداد از دیرباز در کار مطالعهٔ خواص اعداد اول بوده‌اند. بسیاری ازقوانینی که کشف کردند ــ مانند به‌اصطلاح‌قوانین تقابلی‌بالاتر ــ اخیراً برای آزمودن اول‌بودن اعداد درالگوریتم نوینی ادغام شده‌اند که وارسی حتی اعداد یکصد رقمی را عملی می‌سازد.

مسألهٔ دیگری که درمحاسبه بسیار رخ می‌دهد تعیین این امراست که آیا دوگراف n نقطه‌ای ظاهراً متفاوت درواقع همریخت هستند یعنی، الگوی پیوند نقاط آنها یکی است ــ یا خیر. تا همین سالهای اخیر، این نکته را تنها ازطریق‌آزمون و خطا می‌توانستیم تعیین کنیم. اما هدف برخی از الگوریتمها کشف تقارن بین دو گراف است، که ازیکی ازپیروزیهای اخیرجبر، یعنی رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، بهره می گیرد. الگوریتمهای جدیدکه برتقارن استوارند، بسیارسریعتر از آزمون و خطا عمل می‌کنند، هرچند هنوزهم راههای بهتری مورد جستجو است.

مسألهٔ کامپیوتری دیگری که در صنعت اهمیت دارد ، یعنی برنامه‌ریزی بااعداد صحیح، این‌است‌که بهینه‌سازی زمان‌بندی‌یا استفاده از مواد را برای یك‌مؤسسه میسرسازد. درچند سال گذشته، روشهای‌قرن نوزدهمی‌مطالعهٔ شبکه‌ها درهیأتهای اعداد جبری درمورد برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به‌کار گرفته شده و به‌الگوریتمهای جدیدی انجامیده است. (به‌علاوه ، همین روشهای شبکه‌ای سریعترین الگوریتمها را برای تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌وجود آورده است.)

ریاضیدانان درکنارجستجوی الگوریتمهایی برای‌حل مسائل‌عملی، طرح پرسشهای عمیقی را آغازکرده‌اند . ازجمله «حدود مطلق کران پایین‌سرعت درحل مسائل کدام‌اند؟» و «آیا برخی مسائل ذاتاًسرکش هستند؟» باساختن‌مدلهای‌محاسبه‌براساس‌ماشینهای‌تورینگ، ریاضیدانان به پاسخهایی مقدماتی دست یافته‌اند. پیامدهای یکی از مباحث‌جالب توجه نمایانگر این نکته است که برخی مسائل را، به‌نام مسائل NP تمام، نمی‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد. کار کردن برای اثبات اینکه رده‌ای از مسائل از لحاظ محاسبه سرکش می‌مانند، ظاهراً عبث می‌نماید، اما چنین برهانی دقیقاً روشن خواهد کرد که چه چیزی‌یك محاسبه را سرکش می کند، ولذا یافتن الگوریتمهایی را برای مسائل سرکش آسانتر می‌سازد.

تصادفی بودن محاسبه

یکی از زیباترین کشفیات ریاضی در زمینهٔ محاسبه این است که محاسبه‌ای که بر عاملی تصادفی ــ مثلاً، پرتاب سکه ــ متکی است می‌تواند بسیار کارامدتراز هرالگوریتم از پیش تعیین شده‌ای باشد.

نمونهٔ کلاسیك این موضوع روش مونت‌کارلو است، که در دههٔ ۱۹۴۰ ارائه شد. مثلاً، برای محاسبهٔ مساحت تخته هدفی که بر دیواره‌ای‌به‌مساحت ۱۰۰ فوت مربع‌سوارشده، و ۵۰۰ نیزه را به‌طور تصادفی به سوی دیوار پرتاب می‌کنند. فرض کنید ۳ نیزه برتخته می‌نشیند، مساحت‌آن‌تقریباً ۱۵/۵۰۰ مساحت دیوار، یا ۳ فوت مربع است. درحالت کلیتر ، برای محاسبهٔ حجم یك ناحیهٔ R در درون یك جعبهٔ B، n نقطه را به‌طورتصادفی در B برمی گزینیم. براورد خوبی برای نسبت حجم R به حجم B کسری است از n نقطه، که در R واقع‌اند. در واقع خطای این روش با اختیارکردن نقاط بیشتر به سمت صفرمیل می کند، وآهنگ همگرایی با $n^{-1/2}$ متناسب است.

روش مونت‌کارلوبرای شکلهای پیچیده و/یا ابعاد زیاد فوق‌العاده کارامد است. این‌روش به‌روش عددی‌متداولی‌برای محاسبهٔ‌انتگرالهای چند بعدی تبدیل شده است و انتگرالگیری توابعی راکه به راههای دیگرنا‌ممکن‌است، استاندارد‌سازی می کند. درمقابل باروش‌مونت کارلو، برخی محاسبات مطلوب به‌ظرفیتی به مراتب بیشتر از ظرفیت کامپیوترهای موجود نیازدارند. معماران کامپیوتر درکارتحقیق‌اند که چگونه می‌توان واحدهای پردازش موازی زیادی را ، خواه برای کامپیوتر چند منظوره یا برای کامپیوتر مختص یک محاسبهٔ ویژه، به‌طور مؤثر به‌هم پیوند داد.

تصادفی بودن الگوریتمها

مثالهای بالایکی ازکاربردهای تصادفی‌بودن دریك دستگاه‌پیوستار را نشان می‌دهد. اخیراً، تصادفی بودن کاربردپذیری خود را در مطالعهٔ مسائل جبری نیز نشان‌داده‌است. دراینجا یك روش تصادفی دقیقاً پاسخ

صحیح را به‌دست می‌دهد ــ مگر گاه‌گاهی، که پاسخی اشتباه باشد. هر یك از این روشها به ویژگیهای ساختاری بنیانی موجودات جبری مجردی مانند حلقه‌های چند جمله‌ایها، هیأتهای اعداد، و گروههای جابگشتها وابسته است.

چنین الگوریتمی چگونه سودمند می‌افتد؟ اجرای الگوریتمی که در ۱۰۰ درصد موارد درست باشد ممکن است نیازمند n^6 مرحله باشد، در حالی که الگوریتمی که پاسخ درست را تنها در ۹۹٫۹۹۹۹۹۹۹۹ درصد موارد به دست می‌دهد اجرایش صرفاً نیازمند n مرحله است. صرفه‌جوییهای عظیم در وقت بر امکان ناچیز خطا می‌چربد. در هشت سال گذشته، به چندین نمونه از این گونه روشها دست یافته‌اند.

یکی از الگوریتمهای تصادفی، که دامنهٔ ایمنی کامپیوتر را با هزینهٔ اندکی بسیار بالا می‌برد بزودی در درون تراشه‌های سیلیسیم سیم‌بندی خواهد شد. این الگوریتم، ثبت «اثرانگشت» پرونده‌های کامپیوتری را به‌خاطر باز داشتن دیگران از تحریف آن، میسر می‌سازد. فرض کنیم در دیسك کامپیوتری ۲۰ میلیون لقمه (بایت) اطلاعات ذخیره شده باشد. این لقمه‌ها را به‌صورت ضرایب یك چندجمله‌ای از درجهٔ ۲۰٬۰۰۰٬۰۰۰ در نظر می‌گیریم؛ این چندجمله‌ای را بر یك چندجمله‌ای درجهٔ ۱۳ که به‌طور تصادفی اختیار شده است تقسیم می‌کنیم و باقیماندهٔ تقسیم را کنار می‌گذاریم. اکنون ضرایب چندجمله‌ای را که به‌طور تصادفی برگزیده‌ایم و ضرایب باقیمانده را یادداشت می‌کنیم و آنها را در برگه‌دان خود قرار می‌دهیم. اینها برای پروندهٔ شما حکم یك «اثرانگشت» را دارند. احتمال اینکه یك مداخله‌گر بتواند داده‌ها را بدون تغییر این اثرانگشت تصادفی عوض کند کمتر از یك در ۱۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰ یا با نماد علمی، $۱۰^{-۲۰}$ است.

اگر امکان خطای اندکی مجاز باشد، آزمون اول بودن یك عدد، مسأله‌ای که در بالا از آن یاد کردیم، بسیار آسان از کار درمی‌آید. اگر عدد صحیحی مانند n عدد اول نباشد، آنگاه دست کم ۳/۴ اعداد بین ۱ و n دارای خاصیت ویژه‌ای چون Sاند که می‌توان آن را به سرعت وارسی کرد. اگر n عدد اول باشد، چنین اعدادی با خاصیت S وجود ندارند. آزمون ساده است: پنجاه عدد انتخاب کنید و ببینید آیا خاصیت S را دارند یا خیر. اگر یکی این خاصیت را داشته باشد، پس n اول نیست. درغیراین صورت، n تقریباً با اطمینان اول است ــ زیرا، اگر n اول نباشد، احتمال انتخاب کردن پنجاه عدد به‌طور تصادفی بدون اینکه خاصیت S را داشته باشند دست بالا در حدود $(۱/۴)^{۵۰}$ (یا $۱۰^{-۳۰}$) است. اگر این احتمال به‌اندازهٔ کافی مطلوب نباشد، روی پنجاه عدد دیگر همین کار را انجام دهید؛ این کار فقط یك یا دو ثانیه به درازا می‌کشد، و امکان خطا سریعتر کاهش می‌یابد.

کامپیوتر در خدمت اثبات

ریاضیدانان کامپیوتر را به‌صورت آزمایشگاهی علمی برای آزمودن ایده‌ها و رسیدن به پنداره‌های دقیق، بر پایهٔ مدارك عددی، به خدمت گرفته‌اند. این فکر اخیراً درمطالعه و بررسی نگاشتهای بازه، و به‌طور کلی در زمینهٔ سیستمهای دینامیکی، به‌بار نشسته است. کامپیوتر همین کاربرد را درنظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، توپولوژی، آنالیز مختلط، ومطالعهٔ پتانسیلهای شبه دوره‌ای دارد. ازمحاسبهٔ بسیاردقیق، الگوهایی زاده می‌شوند. درمواردی، محاسبات مفصل، حتی نشان می‌دهند چه موقع تابعی نقاط بازگشت یا ناپیوستگیهایی دارد و بنابراین اساس پنداره‌های ریاضی را پایه‌ریزی می‌کنند.

اما، اخیراً امکانات تازهٔ فریبنده‌ای پدیدآمده است: در برخی موارد کامپیوتر می‌تواند به‌جای اینکه آزمایشگاه ریاضیدان باشد، در پروراندن یك اثبات سنتی ریاضی، همچون یك همکار برای او عمل کند. کامپیوتر می‌تواند کار جبری، ترکیبیاتی، یا تحلیلی انجام دهد. درمورد اولی، مانند تحلیل مسألهٔ چهاررنگ، کامپیوتر این نکته را وارسی می‌کند که آیا تعدادی متناهی ومعین ازحالتهای یك حکم ترکیبیاتی برقرار است یا خیر؛ این کار با وارسی یکی از آنها پس از دیگری انجام می‌گیرد. تبدیل این قضیه به‌حکمی ترکیبیاتی کاری است که برعهدهٔ ریاضیدان می‌ماند.

کامپیوتر همچنین می‌تواند نامساویهای ضروری برای اثبات یك قضیه را تحقیق کند. این کار می‌تواند با دقت ۱۰۰ درصد انجام گیرد. ریاضیدانان باید کامپیوتری داشته باشند که بررسی کند آیا یك عدد خاص x قطعاً در بازهٔ $[a\ ,\ b]$ واقع است یا خیر. اثبات نامساوی $y > x$ به اثبات این موضوع تبدیل می‌شود که کران بالای x ــ بازهٔ کمتر از کران پایینی y ــ بازه است. این محاسبه با بازه‌ها را می‌توان با تبدیل هرمحاسبه به حساب اعداد صحیح با اطمینان انجام داد.

این روش درمطالعهٔ تکرار نگاشتهای بازه با موفقیت به‌کار گرفته شده است، و در اثبات اخیر در مورد وجود یك نقطهٔ ثابت برای تکرار یك نگاشت درجهٔ دوم جزء با اهمیتی است. کامپیوتر می‌تواند تعداد زیادی براورد را وارسی کند، که هریك از آنها را می‌توان با دست انجام داد. اما انجام این براوردها وقتی کلاً مد نظر باشند، مشکلات زیادی را می‌آفرینند.

این دو مثال هر دو انحرافی ازسنت‌اند که می‌توانند از اهمیت فزاینده‌ای برخوردار باشند. دراین مرحله ما پیشگویی نمی‌کنیم که کامپیوترها درطراحی ساختمان یك اثبات جایگزین تفکر ریاضیدان خواهد شد. امادرمواردی مطمئناً چنان به‌یاری ریاضیدان می‌شتابند که نقش آنها خیلی فراتر از آزمایشگاه تجربی یا مدل ریاضی خواهد بود؛ کامپیوتر با تثبیت تعداد زیادی اتحاد یا نامساوی در درون یك اثبات ریاضی، مکمل توانایی ریاضیدان خواهد بود.

آنالیز عددی و مدل‌سازی ریاضی

ردپای مراحل اولیهٔ آنالیزعددی را می‌توان در آثار نیوتن (قرن ۱۷) و اویلر (قرن ۱۸) سراغ گرفت. اما، ریاضیات گسسته با ظهور کامپیوتر به سرعت تکامل پیدا کرد. در دورهٔ پس از ۱۹۵۰، وارونی ماتریسهای تنك و انتگرالگیری عددی به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفتند؛ روشهای انتگرال گرفتن از معادلات دیفرانسیل معمولی جزئی نیز به همین منوال بود. این پیشرفتها طراحی مهندسی را در گسترهٔ وسیعی از مسائل میسر کردند. امروزه بیشتر طراحی و توسعهٔ تکنولوژی پیشرفته ــ از اتومبیل و هواپیما تا مهندسی نفت وماهواره ــ برشالودهٔ شبیه‌سازی کامپیوتری استوار است. افزون براین، محاسبات بیدرنگ به پیروزیهایی در زمینهٔ اکتشافات فضایی و کنترل خودکار موشك انجامیده است.

اما، همهٔ محاسبات را نیز نمی‌توان در مجرای خودکار انداخت. اهمیت مغز متفکر چندان است که هرچه برآن تأکید ورزیم گزاف نگفته‌ایم. دریك سمت مدل‌سازی عددی، قوانین فیزیکی و معادلات ریاضی قرارمی گیرند که یك فرایند مهندسی خاص را توصیف می‌کنند، در دیگرسو الگوریتمها و کدها (برنامه‌ها)ی عددی هستند که برای دستور دادن به‌کامپیوتر به کار می‌روند. پیوند دادن این دو حوزه مستلزم محاسبات ریاضی تقریبهای گسسته، و درکی ریاضی ازساختار معادلات، و پدیده‌های غیرخطی است که توسط این معادلات توصیف می‌شوند.

در اینجا روشهای تفاضل متناهی و عنصر متناهی نقشی اساسی‌بازی کرده‌اند. با ظهور محاسبهٔ برداری وموازی، مسائلی که از دیرباز غیر قابل حصول تصور می‌شدند اینک رام می‌شوند. علی‌رغم پیشرفتهای اخیر، آنالیز عددی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی‌در سه بعد، همچون بسیاری ازمعادلات مرزی دیگر، باید منتظر روشهای ریاضی نوینی باشند.

همچنین ریاضیات نوین می‌تواند بین‌دوپرسش مهم دربارهٔ سرعت محاسبه تمیز قائل شود. آیا محاسبات را می‌توان آنقدر سریع انجام داد که سودمند باشد؟ دربسیاری ازمسائل رایج در مهندسی انجام‌کار درمدتی خیلی‌کم امری اساسی است. ثانیاً، ریاضیات نوین می‌تواند به‌این مسأله پاسخ دهد که آیا محاسبه‌ای صرفاً شدنی است، یا آنکه می‌توان آن را در زمان لازم که عملاً بدکار می‌آید برای یک منظور عملی مانند به‌زمین نشاندن هواپیما انجام داد.

ریاضیات عددی درتحقق سه تحول‌قابل ملاحظه‌نقشی کلیدی‌بازی می‌کند: نشستن شبیه‌سازی کامپیوتری به‌جای آزمایش، علم تصمیم، و پردازش داده‌ها و سیگنالها. محاسبه می‌تواند از آزمایش ارزانتر تمام شود. اصلاح طرح آزمایشها در یک بررسی کامپیوتری از یک آزمایش فیزیکی واقعی بسیار ساده تر است. برای برخی پروژه‌ها، آزمایش خطرناک یا ناممکن است.

در آئرودینامیک، طراحی هواپیما، توربین وکمپرسور به‌کمک کامپیوتر انجام می‌شود. برای عمل شبیه‌ساز پروازکه درآن خلبانهای فضاپیما آموزش می‌دیدند، توانایی محاسبهٔ نیروهای آئرودینامیکی وارد بر فضاپیما (شاتل) ضرورتی قطعی بود.

برخی ازکاربردهای دیگر دینامیک عددی سیالها عبارت‌اند از: طراحی بدنهٔ کشتی، محاسبهٔ الگوهای احتراقی، جریان آمیزه‌ای از روغن و آب (یا سایر مواد شیمیایی) برای بازیابی روغن اضافی، جریسان یافتن چند فازی [مواد] در رآکتورها تحت شرایط گذرا، جریان آب زیرزمینی از میان صخره‌های خرد شده، و انتشار سیگنالهای صوتی در لایه‌های زمینی، و مانند آنها. طراحی رآکتور همجوشی هسته‌ای برپایهٔ مدل‌سازی ریاضی‌متکی‌است؛ به‌وجود آوردن پلاسما با چگالیهایی که مورد نظر ماست هنوز برروی زمین ممکن نشده است؛ این‌نوع پلاسماها تنها به‌صورت‌مدلهای ریاضی‌موجودند. همین امر در مورد ایجاد لیزر همجوشی هم صادق می‌کند.

تحقیق درعملیات، حوزه‌ای از علم تصمیم که بر عملیات ریاضی روی داده‌های ذخیره شده متکی است، بساده‌کردن عملیات‌بزرگ‌مقیاس یاری عظیمی رسانیده و استفادهٔ بهینه از منابع را تضمین کرده است. برنامه‌ریزی خطی، ازهمان نخستین کاربردهای صنعتی‌اش در جدول زمان‌بندی پالایشگاههای نفت درآغاز دههٔ ۱۹۵۰، به‌افزایش اساسی کارایی عملیاتی که در تجزیه [مواد] مورد استفاده قرار می‌گرفت، منجر شده‌است. توپولوژی، آنالیزمحدب، ریاضیات‌ترکیباتی، و هندسه، جملگی درپیشبرد این مدل ریاضی سهم داشته‌اند.

با انجام عملیات ریاضی روی اطلاعات ذخیره شده به‌صورت رقمی می‌توان جزئیات پنهان در توده‌ای از داده‌ها را استخراج کرد. دراینجا ریاضیات آمار وارد کار می‌شود تا گرایشها و همبستگیهای پنهان را نشان دهد. در علوم پزشکی، مدل‌سازی فیزیولوژیک در را به روی امکاناتی برای فهم عملکردهای زیست‌شناختی موجودات زنده و نیز طراحی اعضای مصنوعی مؤثر، می‌گشاید. شاید جالبترین موفقیت محاسبات [کامپیوتری] درپزشکی کاربرد آن دربرش‌نگاری (توموگرافی) با پرتوایکس کامپیوتری است، ونیز درسایرپیشرفتهای تشخیص بدون استفاده ازجراحی (بردن دستگاههای تشخیص به‌درون بدن) که از فراصوتی، تشدید مغناطیسی هسته‌ای، و برش‌نگاری گسیل پوزیترون بهره می‌گیرند.

تأثیر کامل کامپیوتر در دهه‌های آینده‌آشکار خواهد شد. کامپیوتر مانند اختراع ماشین بخار، برای بالابردن سطح زندگی ما دارای ظرفیت عظیمی است. ابتکاراتی که هم اکنون برای ابرکامپیوترها و کامپیوترهای نسل پنجم (که هدف آن هوش مصنوعی، تشخیص الگوها، پردازش اطلاع و مانند آنها، و نیز محاسبات علمی است) درجریان است می‌تواند تنها تا اندازه‌ای نتیجه‌بخش باشد، مگرآنکه چنین سخت افزاری با دیدگاههای ریاضی نوین تکمیل شود.

معماری کامپیوتر امروزی، رشته‌ای است؛ این کامپیوتر به افتخار فون نویمان که چگونگی اجرای این نوع برنامه نویسی را نشان داد، ماشین فون نویمان نامیده می‌شود. در انقلاب آیندهٔ سخت‌افزار محاسبات، سازماندهی به‌جای‌اینکه رشته‌ای باشد، موازی‌است. این‌کامپیوترخیلی بیشترشبیه ساختار موازی‌مغز طراحی خواهد شد، که کندتر اما بسیارپیچیده‌تر است. مطمئناً برای‌ساخت وبرنامه‌دادن به آن و به‌رهیافت‌مفهومی نوین نیازخواهدبود. کامپیوتر، درتمام‌کاربردهایش، به‌طور حیاتی به ایده‌ها، بینشها، و روشهای برگرفته از ریاضیات وابسته است.

ترجمهٔ بهرام معلمی

• Jaffe Arthur, "Appendix C. ordering the universe: the role of mathematics", *Renewing U.S. Mathematics, Critical Resource for the Future*, National Academic Press, Washington D.C, 1984, 117-162.