صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات*

(۳)

آرتور جفی*

۴. ارتباطات

همچنانکه ارتباطات الکترونی سریع به‌پدیدهٔ متداولی تبدیل می‌شود، نیازعظیمی به‌روشهای انتقال بهتر به‌وجود می‌آید ـ روشهایی که اثر خطاهای اجتناب‌ناپذیر انتقال را بـه حداقل برسانند، روشهایی کـه پیامهای محرمانه یا سری را محافظت کنند و پیامها را بـا بالاترین کارایی ارسال کنند. بسیاری از بهترین روشها بـر پایهٔ الگوها یـا ویژگیهای اشیاء کلاسیك جبری یا هندسی استوار است که در ابتدا به‌خاطر جاذبهٔ ذاتی خود مورد مطالعه بوده‌اند. از نظر ریاضی، اینها موضوعاتی در نظریهٔ اطلاعات، کدگذاری و رمزی سازی هستند.

نظریهٔ کدگذاری: محافظت در برابر خطاها

وظیفهٔ دشواری را در نظر بگیرید که یك فضاپیمای مارینر در ارسال تصاویر پیچیدهٔ سطح مریخ با آن روبروست؛ پیامهایی که به‌صورت باریکه‌های نور ارسال می‌کند براثر نوفه‌های تصادفی ضرورتاً مخدوش می‌شوند، ودانشمندان مستقردرناسا نمی‌دانند که آیا داده‌هایی که دریافت می‌کنند صحیح است یا خیر، مگر آنکه قدری اطلاعات اضافی در پیامها وارد شده باشد. یکی از راه‌حلهای این مشکل، مثلاً، پنج بار تکرار پیام است، کـه به گیرنده امکان می‌دهد تمام صور یك پیام را با هم مقایسه کند و به‌حدس دریابد که منظور چه بوده است. اما، این روش با اتلاف زیادی همراه است؛ [زیرا به‌این‌ترتیب] آهنگ ارسال پیامها به یك پنجم کاهش می‌یابد، و حافظهٔ فضاپیما به‌زودی از تصاویری که گرفته اما هنوز نفرستاده است لبریز می‌شود. در محیط خودمان هم همین‌مسأله به‌علت خطاهای استاتیك خط تلفن یا حتی به‌علت خطاهای تصادفی در داده‌های ذخیره‌شده، مانند ترازهای حساب بانکی، پیش می‌آید.

در نخستین روزهای ارتباطات خیلی سریع، کار وارد کردن اطلاعات اضافی بـدون اتلاف بسیار زیاد در آهنگ ارسال، شیوه‌ای بسیار تصادفی داشت. اما، به‌زودی ریاضیدانان پی بردند که می‌توان به‌طور سیستماتیك به این مسأله پرداخت. اولاً برای بررسی این مسأله کـه محتملاً چه پیامی ارسال‌شده‌است، می‌توان از نظریهٔ اطلاعات و احتمال بهره گرفت. ثانیاً کلمات کـدی در یك طرح کدگذاری را می‌توان چنان انتخاب کرد که باعناصر یك شیء جبری یا ترکیبیاتی (مانند یك فضای برداری یا یك گراف) متناظر باشند؛ سپس می‌توان خواص ریاضی این اشیاء را برای براورد کردن قدرت تصحیح خطا و آهنگ ارسال کد، و از آنجا، برای یسافتن کدهای کارامد، به‌کار گرفت. امروزه در برخی از متداولترین کدهای جبری از، مثلاً، خواص هندسهٔ شبکه‌ها در فضای n بعدی و صورتهای خودریخت مربوط به‌آنها، یاهندسه‌های متناهی و گروههای تقارنی آنها، یا رفتار ریشه‌های چندجمله‌ایها روی میدانهای متناهی، استفاده می‌کنند.

مثال جالب‌توجهی که در این زمینهٔ می‌توان آورد، پیشنهاد اخیر گوپا درمورد روش جدیدی برای به کار گیری هندسهٔ جبری در تولید کدهاست. (گوپا یکی از متخصصین برجستهٔ روس در نظریهٔ کدهاست.) او مشخصاً کار خود را با یك منحنی X روی یك هیأت متناهی، نقاط متمایز معینی چون p_0، p_1، ...، p_n بـر X و توابع بـرخه‌ریخت f_1، ...، f_n، که f_i دارای یك قطب ساده در p_i واحتمالاً دارای یك قطب در p_0 است، آغاز کرد. در این طرح، پیامهای مجاز، یـا کلمات کـدی، عبارت‌انـد از n تاییهای $(c_1, \ldots, c_n)$ بـا این محدودیت که $\sum c_i f_i$، به‌ازای یك w که پیشاپیش انتخاب می‌شود، در p_0، صفری از مرتبهٔ w داشته باشد.

نکتهٔ خاص در چنین ساختمان پیچیده‌ای این است که متخصصین هندسهٔ جبری از دیرباز این مفاهیم را مطالعه کرده‌اند. قضیهٔ مشهور ریمان ـ رش براوردی از آهنگ ارسال چنین کدی به دست می‌دهد. به‌همین‌ترتیب، قدرت تصحیح خطای چنین کدی را می‌توان با براورد کردن تعداد صفرهای چنین منحنیهایی از یك گونهٔ مفروض، تعیین کرد. این موضوع در تحقیقات دولینی[1]، راپوپورت[2]، ایهارا[3]، لانگ‌لندز[4]، و سایرین در باب هندسهٔ جبری، نیز بسیار مورد توجه بوده است.

اخیراً، تسفاسمن[5] و لادوت[6]، وزینك بااستفاده‌ازمنحنیهای‌شیمورا[7] با نقاط زیر تکین، روش گوپا را به‌کار گرفته‌اند؛ این‌منحنیها از دیرباز مورد علاقهٔ ریاضیدانانی بوده‌اند کـه در نظریهٔ اعداد، نظریهٔ نمایش گروهها، صورتهای خودریخت، و هندسهٔ جبری مطالعه می‌کرده‌اند. برخی از کدهای به دست آمده نه تنها از بهترین کدهایی که قبلاً شناخته شده‌اند بهترند، بلکه از کران گیلبرت ـ وارشاموف (کرانی خاص برای کارایی که خیلیها فرض کرده‌اند حدی است که کارایی یك کد می‌تواند داشته باشد) نیز بهترند.

---

1. Deligne   2. Rapoport   3. Ihara   4. Langlands
5. Tsfasman   6. Vladut   7. Shimura

نمی‌دانیم این کدهای جدید در عمل چگونه کار خواهند کرد، اما کشف آنها نشان می‌دهد که نظریه‌پردازان کدگذاری چگونه کاربردهای نامنتظره‌ای از شاخه‌های غالباً ناشناختهٔ ریاضیات پیدا می‌کنند. اما، این جریان در هردو راستا جاری است؛ نوع پرسشهایی که نظریه‌پردازان کدگذاری دربارهٔ هندسه مطرح می‌کنند گاهی با آنهایی که توسط هندسه‌دانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، فرق می‌کند. مثلاً، هندسه‌دانان، صفرهای منحنیهای با گونهٔ متغیر روی یك هیأت ثابت را براورد می‌کنند. در این مورد روشهای شناخته‌شده درهندسه را می‌توان تعمیم داد تا کرانهای کدگذاری مطلوب به‌دست آید.

رمزی‌سازی: فرستادن پیامهای سری

رمزی‌سازی عبارت است از فرایند درهم‌ریزی یك پیام به طوری که کدگشایی آن ناممکن شود. این فرایند از زمانی که در ۱۹۷۶ دیفه[1] و هلمن[2] ایدهٔ یك سیستم رمزی کلید همگانی (PKC) را پیشنهاد کردند یکی از موضوعهای داغ مورد توجه ریاضیدانان بوده‌است.

چنین سیستمی از عملیات "دریچه‌ای" ریاضی، یعنی، عملیاتی که اجرای آنها از وارد کردنشان بسیار آسانتر است، بهره می‌گیرد. مثلاً، جمع کردن چندعدد که از یك مجموعه انتخاب می‌شوند، بسیار ساده‌تر از بررسی یك مجموع و پیداکردن اعدادی است که آن‌مجموع را به دست داده‌اند. مرکل[3] و هلمن با استفاده از این مفهوم نخستین PKC را به‌وجود آوردند. ریوست[4]، شامیر[5]، وآدلمن[6]، بر پایهٔ این واقعیت که‌ضرب دو عدد اول دریکدیگر کار آسانی‌است، در حالی که تعیین‌عوامل‌ضرب از روی حاصلضرب کار بسیار دشواری‌است، طرح دیگری را آفریدند. به این‌طرح توجه زیادی مبذول شده‌است.

چیزی که باعث می‌شود PKC ها یکتا باشند، این است که هرگز لازم نیست که فرستنده و گیرنده، کلید سری رمز را برای یکدیگر بفرستند. مثلاً، در طرح دومی که در بالا از آن یادکردیم، گیرنده‌ای یك "کلید همگانی" اعلام می‌کند که مرکب از یك عدد بزرگ N و یك عدد صحیح r است. هرکسی بخواهد برای این‌فرد پیامی بفرستد طبق‌شیوهٔ ساده‌ای‌پیام خود را درهم می‌ریزد: پیام رقمی رابه‌صورت یك عدد صحیح به پیمانهٔ N (که در صورت لزوم می‌توان آن را به بلوکهایی تجزیه‌کرد) درنظر بگیرید و این عددصحیح را به‌توان rام به پیمانــه N برسانید. عدد صحیح دیگری هم مثل s وجود دارد که وقتی پیام رمزی شده را به توان s برسانیم آن را مرتب هم می‌کند. گرفتاری این است کــه تنها راه شناخته شده برای محاسبهٔ s نــه تنها مستلزم دانستن N است، بلکه عوامل اول N نیز باید معلوم باشند ــ واین اطلاعی‌است که‌گیرنده برای خود نگه می‌دارد. بنابراین، گیرنده راهی‌برای رمزگشایی‌دارد، اماهرکس‌دیگرباید ابتدا Nرا تجزیه‌کند.

تجزیهٔ یك عــدد صحیح N مــسألهٔ بسیار دشواری است؛ بهترین الگوریتمهای‌شناخته‌شده هم به‌زمان زیادی نیاز دارند. سرراست‌ترین روش، ممکن است مستلزم آزمــودن حداکثر $N^{1/2}$ عــدد، به عنوان مقسوم‌علیه‌های بالقوه باشد. روشهای بهتری هم طرح‌ریزی شده‌اندکه $O(N^{1/4})$ مرحله دارند؛ در واقع، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان‌تعداد مراحل‌را به $c(\varepsilon) N^{\varepsilon}$ مرحله‌کاهش داد. در اینجا، $c(\varepsilon)$ ثابتی است وابسته به ε، که به ازای $\varepsilon < 1/4$ به سرعت زیاد می‌شود. اما، این الگوریتمها خیلی کندتر از آن هستند که بتوانند عددی ۱۰۰ رقمی را تجزیه کنند.

در مقابل، چون آزمون اول‌بــودن را می‌توان به سرعت انجام داد، گیرندهٔ یك سیستم کلیدهمگانی می‌تواند به‌سهولت یك عدد ۱۰۰ رقمی‌را با یافتن دوعدداول‌پنجاه رقمی وضرب‌کردن آنها در یکدیگر، انتخاب کند.

اینکه‌آیا یك چنین طرح رمزی‌سازی‌برای ارتباطات مهم دولتی یا بازرگانی به‌اندازهٔ‌کافی امنیت دارد، دقیقاً به این امر وابسته است که تجزیه به عوامل اول واقعاً تا چه حد دشوار باشد. اگر معلوم بود که تجزیه به‌عوامل علی‌الاصول‌مسأله‌ای‌رام‌نشدنی‌است،این‌طرح جدید و سهل می‌توانست با اطمینان خاطر تمام مورد استفاده قــرار گیرد. اگر الگوریتم خیلی سریعی [برای تجزیه] وجود داشت، بــاید این طرح را کلا کنار می‌گذاشتند. و بنابراین موضوع امنیت به‌مسائلی وابسته است که یك‌دههٔ پیش فکر می‌شد از اهمیت عملی ناچیزی برخوردارند.

با گسترده شدن موارد استفادهٔ PKCها، ریاضیدانان با چالشهای فزاینده‌ای برای حل و فصل مسائل آنها روبرو خواهند شد. تا این زمان هم، طرح اصلی مرکل و هلمن را شامیر منسوخ‌کرده است؛ او در ۱۹۸۲ نشان داد که روشهای برنامه‌سازی عدد صحیح می‌توانند در پیامهای به هم ریخته الگوهایی را کشف کنند و بــه‌این ترتیب، رمزگشایی غیر مجاز ممکن می‌شود. در مقابل، بسیاری از محققان براین‌عقیده‌اندکه تجزیه به‌عوامل اول یك مسألهٔ اساساً دشوار است. با این‌حال، اگر از تاریخ ریاضی پند بگیریم [امکان پیدایش] روشی انقلابی برای تجزیه به عوامل اول را نباید از نظر دور داشت. همهٔ‌آنچه که می‌توانیم با قطعیت بگوییم، این است که در چنددههٔ‌آینده، نوعی ریاضیات خیلی محض، برخی از شاخه‌های مهم و جدید را به‌وجود خواهد آورد.

۵. مهندسی

مهندسی، مدلی درخشان از ارتباط متقابل میان ریاضیات و سایر علوم را بــه دست می‌دهد. ما در اینجا حوزه‌هایی از فیزیك کلاسیك را در نظر می‌گیریم کــه به رفتارکلی ماده مربوط‌اند: از جمله مکانیك جامدات، شاره‌ها، الکترومغناطیس، واکنشهای شیمیایی، و مانند آنها. قسمت عمدهٔ‌ریاضیاتی که در این‌حوزه‌ها مطرح‌می‌شود غیرخطی‌است، وبه‌همین دلیل مسائل آن بسیار دشوار و مبارزطلب‌اند. کل موضوع چندان متنوع‌است که ما ضمن بخشهای‌آتی تنها می‌توانیم دربارهٔ چند عنوان برگزیده بحث کنیم. مضمون‌تکراری در میان اینها، تأثیرمتقابل آنالیزهای مجانبی وعددی است. برای بحث جداگانه دربارهٔ هریك از دستاوردهای مهم، به فرمولبندی مدلهای ریاضی جدید نیازداریم. روشهای عددی نیز ریاضیات جدیدی را طلب می‌کنند. در این مورد هم نمی‌خواهیم‌تمام مباحث را معرفی کنیم، بلکه مثالهای‌عام را مطرح خواهیم کرد.

معادلات دیفرانسیل

یکی ازفعالترین‌شاخه‌های ریاضیات، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل‌است. همان‌طورکه در بخش‌مربوط به‌فوریه گفتیم، آنالیزهمسازازطریق‌بررسی معادلهٔ پخش و معادلات ماکسول، به‌درك کلاسیك گرما ونور انجامید. اینها تنها دو نمونه از معادلات دیفرانسیل خطی‌اندکه درمهندسی‌نقش عمده‌ای دارند. درمورد معادلات خطی، روشهای کلی پیشرفت زیادی کرده است. دراین‌حوزه، دربارهٔ ویژگیهای جواب معادلاتی که برهر حرکت حاکم‌اند، اطلاعات مبسوطی جمع‌آوری شده است. درکی از مشخصه‌ها، در دستیابی به بینش مهندسی از انتشار موج و جریان

1. Diffe
2. Hellman
3. Merkle
4. Rivest
5. Shamir
6. Adleman

شاره نقش اساسی داشته است. آنالیز فوریه و تعمیمهای آن، چنان مباحث متداولی هستند که افراد معادلات دیفرانسیل خطی را دست کم می گیرند، درحالی که این معادلات شالودهٔ بخش عظیمی از ریاضیات اند. معادلات خطی همچنین پایهٔ نظریهٔ کوانتومی غیر نسبیتی است و بنابراین برای شناخت ماده نیز اهمیت اساسی دارد.

معادلات دیفرانسیل غیرخطی به عصر نیوتن و مطالعهٔ او درباب سیارات برمی گردد. فهم این معادلات، به‌ویژه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی، مشکلتر است. جوابهای معدودی از آنها به شکل فرمول شسته ورفته هستند (جوابهای خاص معادلاتی خاص که درطبیعت تعبیری دارند، مانند سولیتونها، درمدلهای مهندسی و فیزیک کاربردهای زیادی یافته‌اند). به‌علاوه، روشهای فهم یک معادله برای معادلهٔ دیگر فوق‌العاده نامناسب به نظر می‌رسند! اما، همین معادلات هستند که در توصیف واکنشهای شیمیایی دریک موتور احتراقی، جریان شاره تحت اکثر شرایط، مغناطو هیدرودینامیک، یا تنش اجسام جامد، اهمیت دارند. به‌طور کلی، معادلاتی که دماها، نیروها، یا فشارهای خیلی زیاد را توصیف می کنند، به‌سوی غیرخطی بودن گرایش دارند. بنابراین، بسیاری از مهمترین مسائل مهندسی معطوف به‌درک اثرات غیرخطی اند. آشکار است که ادراکی نظری از این معادلات، برای مسائل کیفی و کمی طراحی، مهم است.

معادلات غیرخطی می‌توانند، به‌ازای مجموعهٔ مفروضی از مقادیر مرزی یا شرایط اولیه، بیش از یک جواب هم داشته باشند. این پرسش که آیا چنین چیزی برای یک معادلهٔ خاص پیش می‌آید یا نه وچه موقع پیش می آید، موضوع بخش اعظم تحقیقات جاری است. فرایند دوشاخه شدن که می‌تواند درآغاز نایکتایی [جواب] پیش آید، مسلماً برای پایداری سازه‌ها، فرایندهای شیمیایی، و جریان متلاطم، اهمیت دارد. در این بخش به‌بسیاری از جنبه‌های دیگر معادلات دیفرانسیل نیز نظری خواهیم افکند.

نظریهٔ توابع مختلط

اعداد مختلط را در قرن شانزدهم برای حل کردن معادلات درجهٔ دوم معرفی کردند. حدود ۳۰۰ سال بعد از آن بود که گاوس نشان داد ریشه‌های هرمعادلهٔ جبری، اعداد مختلط اند. به‌علت نفوذ او و کوشی، نظریهٔ توابع یک متغیرمختلط به‌صورت یکی از حوزه‌های اساسی تحقیقات ریاضی درآمد. قضیهٔ معروف کوشی در باب انتگرال، در ۱۸۲۵ اثبات شد؛ کوشی شالودهٔ نظریهٔ انتگرالهای بیضوی را نیز بنا کرد. بیست و پنج سال بعد، ریمان با کشف روابط میان مسائلی در فیزیک از یک سو، و مسائلی در نظریهٔ توابع مختلط از سوی دیگر، به این مبحث غنای فوق‌العاده‌ای بخشید. با الهام از نتایج و حدسهای ریمان، تحولات بعدی به‌موفقیت کامل رسید؛ از جملهٔ این موفقیتها وحدت و روشن شدن تبدیلات انتگرالی بود که امروزه با نام فوریه، لاپلاس، پواسون، و هیلبرت قرین اند.

آنالیز مختلط به‌مهندسی راه یافته است. علت عمده‌ای که درپس موفقیت این روش نهفته است، این است که با به‌کار گرفتن اعداد مختلط، مسائل دوبعدی را می‌توان به‌همان روش مسائل یک‌بعدی مورد بررسی قرارداد. با اینکه بردارها نیز آنالیز چند بعدی را ساده می کنند، ولی پیرو حسابی هستند که با حساب اعداد، متفاوت است. به‌کمک اعداد مختلط، هم می‌توان مسائل وابسته به‌دومتغیر (مثلاً، مسائل سه‌بعدی با یک تقارن) را مورد مطالعه قرارداد، و هم مسائل مربوط به دوتابع حقیقی‌-مقدار را که به‌صورت یک تابع مختلط‌-مقدار قابل بررسی اند. دانشمندان آزمایشگاههای بل قبل از ۱۹۲۰ دست‌اندرکار استفاده‌ای سیستماتیک از نظریهٔ توابع مختلط در طراحی بالایه‌ها و تقویت کننده‌های با بهرهٔ زیاد بودند که در نتیجه، ارتباط تلفنی راه دور امکان پذیر شد. محک نای کویست برای پایداری تقویت کننده‌های فیدبک ــ جنبه‌ای از "اصل شناسه" در آنالیز مختلط ــ مثالی قابل توجه از اهمیت نظریهٔ توابع مختلط است. نمودار نای کویست که از لحاظ ریاضی سرراست است، برای فهم و از بین بردن ناپداری فیدبک به‌ابزار معجزه‌آسایی تبدیل شد؛ این نمودار اکنون به هر مهندسی آموخته می‌شود.

درحل دسته‌ای از مسائل، تکنیکهای نگاشت همدیس در راستای خطوطی که ریمان در ذهن داشت به‌کار گرفته شده‌اند. همان طور که باید انتظار داشت، کاربردپذیری کلی آنالیز مختلط درمسائل دوبعدی به‌افسانه تبدیل شد. مثلاً، ژوکووسکی تکنیکهای نگاشت مختلط را برای مشخص کردن شکل یک برگهٔ هوابر، و برای تحلیل الگوی جریان هوا در اطراف آن، به‌کار برد و به‌این طریق، در طراحی هواپیما انقلابی به‌پا کرد. نظریهٔ توابع مختلط درهر توصیف جریان شاره‌ها، و درطراحی اتومبیلها و کشتیها، به‌ابزاری اساسی تبدیل شد.

سریهای زمانی و نظریهٔ کنترل

کارهای علمی نوربرت وینر نمایانگر دستاوردی نامعمول درریاضیات است، زیرا قسمت اعظم مجردترین و نظریترین کار او، کاربرد "آنی" یافت. نظریهٔ او در باب تحلیل سریهای زمانی که وی آن را در خلال جنگ جهانی دوم به‌منظور کاربرد درتوپخانه پرداخت، به‌محور اصلی نظریهٔ جدید کنترل تبدیل شد. درواقع صورت اولیهٔ مقالهٔ کلاسیک او، باعنوان "برونیابی، درونیابی، و هموارسازی سریهای زمانی ایستا"، سندی طبقه‌بندی شده بود. به‌این مقاله، به اعتبار رنگ جلدش و به‌خاطر درک ناپذیری مضمونش برای مهندسان، از روی مهربانی لقب "خطر زرد" دادند. اما، این اثر نه تنها برتوپخانه، که برتمامی شاخه‌های مهندسی، تأثیرات ژرفی برجای گذاشت. از جنبهٔ نظری، کار وینر با تعبیر نورمن لوینسون[1]، با تحقیقات پیشرو کولموگوروف در اتحاد شوروی درهم آمیخت و شالودهٔ نظریهٔ ارتباطات را تشکیل داد، و نیز برنظریهٔ ارگودیک جدید و مکانیک آماری تأثیر بسیار گذاشت. همان گونه که در بخش دیگری توضیح داده شد، نفوذ آن در سراسر فیزیک گسترده است.

دربارهٔ نحوهٔ کنترل فرایندهای مهندسی، مسائل زیادی مطرح است. نظریهٔ کنترل درحساب تغییرات ریشه‌های عمیقی دارد. فرمولبندیهای اولیهٔ آن برروشهایی استوار بودند که مستقیماً از آن بخش ریاضیات، یعنی، محک پایداری نای کویست، پالایهٔ وینر، اصل ماکسیمم پونتریاگین[2]، پالایهٔ کالمن، و نظریهٔ احتمال، نتیجه می‌شدند. تحقیقات اخیر در راستای درک سیستمهایی درجریان است که معادلات گرما یا موج برآنها حاکم است، مانند شبکه‌های انتقال نیرو، شبکه‌های تلفن، مجتمعهای پردازش شیمیایی، سیستمهای بزرگ قطعه‌های مکانیکی یا الکتریکی جفت شده، وغیره. مبحث آدمهای ماشینی پرسشهایی را پدید می آورد ــ ازجمله حرکت مقید، پاسخ به‌سیگنالها، و مانند آن ــ که همگی مربوط به‌این حوزه هستند.

یک مسألهٔ علمی مربوط به‌این موضوع، فهم ماهیت پیامهای رقمی است. کلود شانون شاگرد وینر تحلیلی از انتقال همراه با نوفه به‌عمل آورد. امروزه کار او را اساس نظریهٔ نوین اطلاعات می‌دانیم. این نظریه پایهٔ نظری تمامی ارتباطهای تلفنی وداده‌ای، و نیز زمینهٔ کاری

---

1. Levinson   2. Pontryagin

را که در بخش مربوط به کدگذاری درمورد آن بحث کردیم، به‌دست می‌دهد.

دامنهٔ تأثیر تحلیل سریهای زمانی به ارتباطات محدود نشد. وادزورث[1]، یکی از همکاران وینر، اتفاقاً به‌زمین‌شناسی به‌نام هرلی[2] برخورد. بحثهای اتفاقی آنها درحدود ۱۹۵۰ روشن کرد کـه تحلیل سریهای زمانی ممکن است در اکتشاف لـرزه‌ای نفت مفید باشد. این روش وینر، که وادزورث، برایان، رابینسون، و هرلی آن را تکامل بخشیدند، به‌ابزار استانده‌ٔ جدید اکتشاف نفت‌تبدیل شده است‌ادر آن زمان روش‌جدید تحلیل‌سیگنالهای صوتی بازتابیده از زمین‌را به کمك ماشینهای حساب رومیزی به مرحلهٔ اجرا درآوردنـد؛ امروزه این‌کار طبیعتاً به وسیلهٔ کامپیوترهای بزرگ انجام می‌شود. در صنعت، تحول روشهای قبلی به‌روش وینر را "انقلاب رقمی" می‌نامند. جالب توجه است کـه بیست و یك کمپانی نفت ازمطالعات بخش زمین‌شناسی MIT روی‌کاربرد این‌روش حمایت می کردند. اما بخش صنعت ازتحقیقات ریاضی محض همین دانشگاه‌که چنین‌کاربردهایی را امکانپذیر ساخت، هیچگونه حمایت مالی نکرد—حتی به‌ازای چنین خدمت مهمی دراین مقیاس‌زمانی کوتاه. درواقع، در دوران پیشرفت اولیهٔ ریاضیات مربوط به‌این موضوع — پیشرفتی که به‌سوی هدفی کاملاً متفاوت جهت گیری شده بود — نه به‌این‌کاربردها برخورد کرده بودند و نه‌حتی آنها را در خواب می‌دیدند.

مکانیك جامدات و کشسانی

مکانیك جامدات علمی است که به‌مطالعهٔ تغییر شکل و حرکت اجسام جامد تحت اثر نیروها می‌پردازد. این علم رفتار فنرهـای فولادی و بالهای آلومینیومی هواپیما، تایرهای‌لاستیکی و اسفالت جاده‌ها؛ تار عضله‌ای و تار نایلونی را توصیف می‌کند.

ابزار ریاضی برای توصیف چگونگی تغییرشکل یك‌جسم؛ جامد یـا شاره، را کوشی به‌وجود آورد. این ابزار درسالهای اخیر بهبود یافته است. هرجزء از هرجسم باید درمعادلات حرکت واحدی صدق کند. عنصر اساسی در مکانیك جامدات، معادله‌ای است کـه چگونگی ارتباط شدت نیروی‌وارد برهرنقطه ازجسم‌را با تغییرشکل درنزدیکی آن نقطه بیان می کند. ما می‌توانیم یك نوار لاستیکی را از یك نوار فولادی با توجه به‌این نکته تمیز دهیم که یك نیروی مفروض، انبساط طولی‌بسیار بیشتری دریك نوارلاستیکی ایجاد می کند. معادلات‌دیگری پاسخهای هوا، آب، رنگ، و قیر را تمیز می‌دهند. این معادلات را می‌توان ازآزمایش یا ازیك مدل بنیادی استنتاج کرد.

کشسانی با رفتارموادی سروکار داردکه فنری‌اند، مانندلاستیك، قلب، عضله، وفولاد. نظریهٔ خطی کشسانی تغییرشکل‌اندك اجسام‌کشسان را توصیف می کند، وشالودهٔ مطالعه سازه‌ها، ماشینها، امواج لرزه‌ای، و مانندآنها را تشکیل می‌دهد. پلاستیسیته با جامداتی مانند گیره‌های کاغذ سروکار دارد که وقتی نیروهایی کـه آنها را تغییرشکل می‌دهند برداشته‌شوند به‌حالت طبیعی‌خود برنمی گردند. پلاستیسیته درراستای توصیف شکل‌گیری فلزات وتعیین‌حد انقطاعی‌سازه‌های‌فلزی، نظریه‌ای مؤثر به‌دست می‌دهد. نتایج به‌دست آمـده در نظریهٔ غیرخطی بـرای پیداکردن آستانه‌هایی کـه درآنها، مواد نسبت به‌محیطشان پاسخهای کیفیتاً متفاوتی دارند؛ نیز به‌کارمی‌روند.

دانستن مقاومت و قابلیت اعتماد اجزاء ماشین، مثلاً شیرهایی که جریان‌مایعات پرتوزای داغ را درنیروگاههای‌هسته‌ای تنظیم‌می کنند،

1. G.Wadsworth 2. Hurley

بسیارمهم‌است. نظریهٔ خطی کشسانی‌رفتار چنین‌اجسامی‌را، به‌استثنای لبه‌های‌کناری و گوشه‌ها، که درآنجا ممکن است ترکهایی پدیدآید، نیك تـوصیف می کند. مطالعات مربوط به‌تکینگی جوابهای معادلات مکانیك جامدات درلبه‌ها وگوشه‌ها، مطالعهٔ نقش پلاستیسیته وکشسانی غیرخطی در چنین تکینگیهایی، و مطالعهٔ محکهای آغاز شکستگی و انتشار ترکها، فعالانه پیگیری می‌شود.

دستگاههای دینامیکی و جریان شاره

جریـان شاره درمهندسی نقش عمده‌ای بـازی می کند، و بسیاری از مطالعات کلاسیك ریاضی را به‌خود معطوف داشته است. به‌طورکلی فرض‌می‌شودکه حرکت یك‌شارهٔ چسبنده وتراکم‌ناپذیر به کمك معادلهٔ دیفرانسیل ناویر-استوکس[1]، ودرحد چسبندگی صفر به‌وسیلهٔ معادلات اویلر توصیف می‌شود. پارامتر نوعی بدون بعدی که جریان شاره را مشخص‌می کند اعداد رینولدز[2] است، که با سرعت شاره متناسب‌است. به‌ازای اعدادکوچك رینولدز (سرعتهای کم یاجریانهایی باچسبندگی زیاد) معادلات ناویر-استوکس به‌خطهای‌جریان هموار، به‌نام‌حرکتهای پوسته‌ای، می‌انجامند. امـا به‌ازای اعداد بـزرگتر رینولدز (یعنی، سرعتهای زیادتر یا چسبناکی کمتر)، این جریـانهای پوسته‌ای دیگر ماندگار نیستند. هرچند ممکن است که جریانهای نـامبرده به عنوان جوابهای معادلات حاکم وجود داشته باشند، ولی پایدار نیستند. در مقابل، اختلالهای زمان-دوره‌ای یا زمان-شبه‌دوره‌ای جریان پایه جای آنها را می‌گیرد. دوشاخه شدن جوابهای معادلات در همین‌جـا پیش می‌آید.

تنها دربیست سال اخیر است که ریاضیدانان در مسألهٔ این‌گذار و محاسبهٔ جریانهای حاصل پس از یك ناپایداری، به پیشرفت مهمی نـائل آمده‌اند. حتی در اعداد رینولدز بزرگتر، جریان بسیار نامنظم می‌شود که به‌آن تلاطم می گویند. واضح است که، هرگونه درکی از تلاطم برای طراحی‌هواپیما، برای درك واکنشهای شیمیایی، احتراق، وجبهه‌های شعله، و مانندآنها، پیامدهای مهمی دربردارد. ازیك‌دیدگاه ریاضی، معلوم‌شده است‌که این‌معادلات به‌طورشگفت‌آوری دشوارند. حتی اثباتی کلی ازوجود جواب برای معادلات ناویر-استوکس یافت نشده است. درك تلاطم‌کاملاً توسعه یافته فعلاً از دایرهٔ فهم ما خارج است. علی‌رغم این واقعیت، دربارهٔ برخی از مدلها وجوابهای‌خاص مطالب زیادی می‌دانیم.

تیلر وفون‌کارمن در دههٔ ۱۹۳۵ مدلهای‌آماری‌گوناگونی برای تلاطم پیشنهاد کردند. اندك زمانی پس از آن، کولموگوروف تلاطم مـوضعاً همسانگرد را معرفی کرد و صورت مجانبی $E(k)\simeq k^{-5/3}$ را برای وابستگی انرژی به‌عدد موج استخراج نمود.

درك جوابهای تلاطمی این معادلات، یا درك آغاز تلاطم وقتی کـه عدد رینولدز افزایش می‌یابد، هنوز هم درمرحلهٔ ابتدایی است. یکی از روشها این بوده است که براوردهای پیشینی به‌دست آورند کـه مـاهیت تکین ممکن یك جـواب را محدود کنند. پیشرفت مهم دراین‌راستا، در دوسالهٔ اخیر با محدودکردن بعد هاسدورف مجموعهٔ تکین، حاصل‌شده است. بعضیها حدس‌می‌زنندکه چسبندگی برمعادلات ناویر-استوکس‌غالب است‌وبنابراین،این‌معادلات‌اصلاً تکینگی ندارند، گرچه عموماً انتظارمی‌رودکه معادلات اویلر برای جریان باچسبندگی صفر جوابهای تکین داشته باشند. مطالعهٔ این‌موضوع درجریان است، و حل ریاضی آن از اهمیت عملی برخوردار خواهد بود.

1. Navier-Stokes 2. Reynolds

نظریهٔ دوشاخه شدن

سرآغاز پیدایش نظریهٔ دوشاخه شدن، مطالعات لئونهارت اویلر در اواسط قرن هیجدهم و کار پوانکاره در پایان قرن نوزدهم است. این نظریه مشتمل است برمجموعه‌ای از روشها برای مطالعهٔ جوابهای معادلات غیرخطی که مشخصهٔ آنها، وقتی که پارامترهایشان آستانه‌های معینی را قطع می‌کنند، به‌طور ناپیوسته تغییر می‌کند. این اتفاق غالباً به‌ازای مقادیر خاصی از پارامتر، وقتی که معادلات ابتدا جوابهای غیریکتا (چندگانه) دارند، رخ می‌دهد. ناپایداریهای تاب خوردن و لرزیدن مثالهایی از دوشاخه شدن‌اند؛ ناپایداریهای پلاسمایی نیز از این گونه‌اند. در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ در اتحاد شوروی واروپا روی‌این نوع معادله به‌شدت کار کردند. از آن پس، نظریهٔ دوشاخه شدن تجدید حیات چشمگیری یافته است. در طی این پیشرفت، روشهای توپولوژی عمومی، توپولوژی جبری، و هندسهٔ جبری با آنالیز پیوند خورده‌اند.

یکی از جنبه‌های قابل توجه دوشاخه شدنها به‌جریان شاره ربط پیدامی کند. به‌ویژه این‌پیشنهاد مطرح است که آغاز تلاطم رامی‌توان به کمک ریاضیات‌دوشاخه‌شدنهای پیاپی، که سرانجام به‌ریاضیات آشوب می‌انجامد، توصیف کرد. چندین طرح مختلف پیشنهاد شده است، که در برخی، تعداد دوشاخه‌شدنها اندک و در بعضی، تعداد نامتناهی است.

دو شاخه‌شدنهای تکرارهای نگاشتهای درجهٔ دوم بازهٔ واحد [۱ ,۱ −] در خودش، شالودهٔ طرحی نظری است از نخستین وهلهٔ تلاطم. دروضعیتهای معینی، شواهد تجربی اطمینان‌بخش این طرح‌را تأیید می‌کنند. این‌نوع مسائل دوشاخه شدن را اولام و فون‌نویمان در دهۀ ۱۹۴۵ مطالعه‌کردند؛ این مسائل‌حتی‌قبلاً درکار ولترا، که دولت نروژ از او خواسته بود نظریه‌ای برای جمعیتهای ماهی بپردازد، هم آمده بود. امروزه، ویژگیهای ریاضی این دوشاخه شدنها با مسائل نظریهٔ ارگودیك، بسطهای کسر مسلسل، گروههای کلاینی، وتوپولوژی نیز ارتباط دارند. تعجب‌آور این است که، اینها با تعیین‌موضع‌یاختهٔ فاز و گروه بازبهنجارش در ریاضیات و فیزیك نیز مربوط می‌شوند.

دوشاخه‌شدنها، مدلی‌از رفتار آشوبناك دریك سیستم تعینی به‌دست می‌دهند. ثابتهای جهانی‌جدیدی کشف شده‌اند که به‌حد دوشاخه‌شدنهای پیاپی مربوط‌اند؛ این اعداد را می‌توان هم درشبیه‌سازیهای عددی و هم در آزمایشهای فیزیکی واقعی معینی اندازه گرفت. شواهد عددی دال بروجود این اعداد جهانی در حدود ۱۹۷۶ کشف شد؛ این امر اخیراً به‌صورت نتیجه‌ای ریاضی ـ با بهره‌گیری ازایده‌های گروه باز-بهنجارش و نیز اثباتی به کمك کامپیوتر ـ ثابت شده است. در حال حاضر، حجم نوشتار ریاضی دربارهٔ این مسائل درحال افزایش‌است، وتأثیرمتقابل بین کشفیات جدید ریاضی وپدیده‌های مربوطه درمسائلی چون‌جریان‌شاره، واکنشهای شیمیایی، یادینامو‌های‌ستاره‌ای خیلیها را مجذوب خود می‌سازد.

می‌توانیم امیدوار باشیم که تحولات اخیردرنظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل با ایده‌هایی چون ربایند‌ه‌های غریب، ریاضیات مجرد فرکتالها، وکاربرد ابرکامپیوترها، به‌پیشرفتهایی منجرشوند. نیز انتظار داریم‌ایده‌های نوین‌ریاضی به‌فهم‌معادلات ناویر-استوکس‌یاری‌رسانند که هم به دلایل بنیادی و هم از لحاظ تکنولوژیك‌اهمیت دارند.

جریان تراصوتی و امواج شوکی

مثالی از برهمکنش عمیق ریاضیات وتکنولوژی عملی‌را می‌توان در تکامل روشهایی یافت که انگیزه‌بخش آنها نیاز طراحان هواپیما به‌محاسبهٔ جریانهای تراصوتی است. در مقام عمل، پرواز تراصوتی و امواج‌شوکی‌رامدلسازی می‌کنند. زمینهٔ این‌رهیافت به‌مطالعاتی‌بستگی پیدا می‌کند که تریکومی[1] در دههٔ ۱۹۲۵ دربارهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی انجام داد، وکورانت، فریدریکس، لوی، و سایرین، با تحلیل نظری جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل بیضوی و هذلولوی‌کاراو را پی‌گیری کردند. گسترش کار آنها به‌درك مطلوبی از ایده‌های اساسی فیزیکی جریان تراصوتی انجامید، اما ناتوانی در محاسبه، پیشرفت کار را محدود کرد.

با این‌حال، از دیرباز معلوم‌شده‌است که نظریهٔ جریان تراکم‌ناپذیر، پدیدهٔ جریان گازهای با سرعت زیاد را توضیح نمی‌دهد؛ بلکه باید معادلات دیفرانسیل جزئی دینامیك گاز تراکم‌پذیر را به‌کار برد. این معادلات برای جریان فروصوتی، موضعاً بیضوی و برای جریان فراصوتی، موضعاً هذلولوی‌اند؛ ودر هردوحالت به‌میزان قابل‌توجهی غیرخطی هستند.

وقتی‌اثرات چسبندگی‌وجود داشته باشند، باید معادلات غیرخطی کامل ناویر و استوکس، و نیز دیگر مدلهای مبسوطتر را مطالعه کرد. سایر اثرات چسبندگی به‌لایه‌های نازکی محدود می‌شوند که شاره را می‌توان در خارج آنها به‌صورت غیرچسبنده بررسی کرد. یکی از پیشرفتهای عمده در ریاضیات کاربردی نوین، نظریهٔ لایه‌های مرزی است ـ ابداعی‌تابناك به‌وسیلهٔ پرانتل[2] در۱۹۰۴. اواثرات‌چسبندگی را بدون قربانی‌کردن جنبه‌های اساسی مدل جریان ساده‌کرد. تکامل ریاضی‌نظریهٔ لایهٔ مرزی بربسیاری ازشاخه‌های علوم محض‌وکاربردی اثرات ژرفی برجای نهاده است؛ و ما را قادر می‌سازدکه پدیده‌های زیادی را مطالعه‌کنیم که در آنها اثرات چسبندگی (یا سایر پدیده‌های مشابه) اساساً به‌نواحی‌خوشتعریفی محدود می‌شوند. در واقع، مطالعهٔ اثرات گذار در لایه‌های نازك، حوزه‌هایی از مهندسی راکاملاً تحت تأثیر قرارداده است.

ظهور محاسبهٔ کامپیوتری پیشرفته، سبب شد که ناپیوستگیها (شوکها) در الگوریتمهای عددی قرار گیرند. این امر، همراه با طرحهای تفاضلی جدید، محاسبات عملی را میسر ساخته است. اکنون می‌توان به‌طرحهای برگهٔ هوابر بدون شوك‌دست یافت وآزمون تونل باد را شبیه‌سازی کرد. شرکتهای هواپیمایی، کدهای‌کامپیوتری بزرگ مبتنی براین ایده‌ها را به‌طور منظم به‌کارمی‌گیرند.

نظریهٔ احتراق و واکنشهای شیمیایی

نظریهٔ جریان واکنش‌پذیر، یا نظریهٔ احتراق در گازها، تمامی نظریهٔ مکانیك شاره‌ها را در برمی‌گیرد و مسألهٔ جدیدی هم به‌آن اضافه می‌کند: برهمکنش جریان شاره با واکنشهای شیمیایی. واکنشهای شیمیایی دریك جریان شاره، مشخصه‌های اساسی آن‌را تغییر می‌دهد. تولید گرما بر اثر واکنشهای گرمازا می‌تواند سبب ناپایداری یك جریان شود؛ و نوع ناپایداریی که پیش می‌آید ممکن است نسبت به‌ناپایداریهای دینامیك شاره‌ای معمولی‌متفاوت باشد. مسألهٔ شعله‌های آرام (شعله‌وری) در یك گاز، و نیز نظریهٔ انفجارهای سریع، یعنی، شوکهای مکانیك شاره‌ای، دو زمینهٔ تحقیقات جاری راتشکیل‌می‌دهند. در نظریهٔ رآکتورهای‌هسته‌ای، این موضوعها به‌مدلهایی برای اندازهٔ بحرانی ومهار گسیختگی گرمایی‌منجرمی‌شوند. روشهای آمیختن‌شیمی مربوط به‌این‌موضوع با آنالیز ریاضی، به‌همین میزان اهمیت دارند. به‌بیان کلیتر، نظریهٔ رآکتورشیمیایی پخش‌و واکنش‌را موردنظرقرار

---

1. Tricomi 2. Prandlt

می‌دهد، امـا معمولاً اثرات مکانیک شاره‌ای تراکم‌پـذیر را در بر نمی‌گیرد. رفـتار آشوبناک دردستگاههای دینامیکی جای خود را در نظریهٔ واکنش شیمیایی بازکرده است. در واقـع، نظامهای آشوبناک به‌طور آزمایشی و محاسباتـی در واکنش بلوسوف‌ـژابوتینسکی[1] و سایر واکنشهای نوسانی دیده شده‌اند. وقتـی غلظتهای شیمیایی یـا آهنگهای جریان تغییر می‌کنند، آشوب به صورت حد دوشاخه شدن پیاپی حرکتهای دوره‌ای پیش می‌آید. این نظریه به‌طور قابل‌توجهی مشابه با ریاضیات مدل دوشاخه شدن برای آغاز تلاطم است که در بالا مورد بحث قرار گرفت.

تبدیلات انتگرالی

تبدیل فوریه حالت خاصی از مفهوم کلی یک تبدیل انتگرالی است که اهمیت ژرفی در فیزیـک و مهندسی و نیز در ریاضیات دارد. تبدیل خطی T ازطریق فرمول زیر، تابع $f(x)$ را به‌مبدل آن، $(Tf)(x)$، مربوط می‌کند:

$$(Tf)(x)=\int K(x,y)f(y)\,dy$$

که در آن $K(x,y)$ تابعی است که تبدیل خاص موردنظر را مشخص می‌کند.

اینکه دقیقاً چه زمانی این ایده‌ها به‌وجودآمدند معلوم نیست، اما لئونهارت اویلر در ۱۷۳۷ از این نوع تبدیل برای حل یک معادلـهٔ دیفرانسیل بهره گرفت. روش کلی را گاوس، فوریه، دیریشله، لاپلاس، و سایرین، در اوائل دههٔ ۱۸۰۰ به‌دست دادند.

همان تبدیلی کـه اویلر آن را مورد مطالعه قرارداد، به صورت ابزاری مهم در کتاب کلاسیک لاپلاس دربارهٔ احتمال، چاپ ۱۸۱۲، ظاهر گشت. او در آنجا نظریهٔ احتمال را در قالبی ریخت که تا قرن بیستم کم و بیش بدون تغییر باقی‌ماند. این تبدیل به‌نام او شناخته شده است.

تبدیل لاپلاس درحوزهٔ مهندسی قبول‌عام نیافت تا اینکه دراواخر قرن نوزدهم هویسایدآن را به‌هیأت تقریباً متفاوتی مجدداً کشف کرد. هویساید، در مواجهه بـا مسألهٔ عملی فهم انتقال و تضعیف امواج در خط تلگرافی سراسری اقیانوس اطلس (کـه در ۱۸۶۶ کشیده شد)، "حساب عملگرهـا" را ابـداع کرد. این روش قدرتمند بسیاری از مسائلی راکه تا آن موقع در مهندسی برق رام‌نشدنی بود، حل کرد. چند سالی بعد، معلوم شدکه این روش جنبه‌ای از نظریهٔ تبدیل‌لاپلاس است، کـه این روزها هردانشجوی مهندسی یا علوم پایه آن را ضمن درسهای خود فرا می‌گیرد.

یکی‌ازپیشرفتهای طبیعی نظریهٔ تبدیل‌فوریه، لاپلاس، و هویساید، بسط ردهٔ توابعی است که این تبدیلها روی آنها تعریف می‌شوند. در فیزیک، دیراک قبلاً با "تابع دلتا"ی خود از این مفهوم بهره گرفته بود، اما برای آن هیچ نظریهٔ ریاضی کلی وجود نداشت. این تحول دردههٔ ۱۹۵۰ به‌نظریهٔ توزیعها (که‌آن را شوارتس، گلفاند وسایرین ارائه دادند) انجامید و ابزاری اساسی برای نظریـهٔ نوین معادلات دیفرانسیل جزئی مهیا کرد.

تعمیمی در راستای دیگر، عبارت است از تبدیل انتگرالی، کـه عموماً آن را مرهون‌کارهای رـادون و رادون درحدود ۱۹۱۶-۱۹۱۷ می‌دانند. به‌ویژه، تبدیلی کـه از یک تابع $f(x)$، تعریف شده بر یک صفحه، به‌دست می‌دهند عبارت است ازانتگرال f روی خطی چون l، یعنی

$$(Tf)(l)=\int_{l} f(x)\,de$$

در اینجا de جزء طول l است. تابع اصلی f را می‌توان با استفاده ازتبدیل رادرون آن بازسازی کرد. این تبدیل، به‌تبدیلی میان دوفضای همگن از یک گروه مفروض تعمیم داده شده است، وهم در آنالیز وهم در هندسه بینش بسیار ژرفی را پدید آورده است.

تقریباً ۶۰ سال پس از دستاورد اولیه‌ای که در بالا یاد کردیم، کورماک فیزیکدان مقالـه‌ای تحت عنوان "نمایش یک تابع به‌وسیلهٔ انتگرالهای خطی آن" نوشت. مسألهٔ اساسی این بود کـه چگونگی بازسازی یک تصویر از یک اندازه‌گیری پرتو x (یا نجوم‌رادیویی) را درک کنند. تحول‌عملی این ایده به برش‌نگاری به‌کمک کامپیوتر، یا سی‌تی‌اسکن، انجامید، و در۱۹۷۹ با جایزهٔ نوبل پزشکی به‌آن‌ارج نهاده شد. در عمـل، هنگـام ساختن دستگاه سی‌تی‌اسکن، سریعترین الگوریتم تبدیل پیچشی ممکن در یک ریز پردازنـده به‌اجرا گذاشته می‌شود؛ این مسأله با الگوریتمهای تبدیل فوریه که در بخش مربوط به‌فوریه توصیف کردیم، رابطه‌ای تنگاتنگ دارد. این امر را باید از وحدت ریاضیات انتظار داشت.

ترجمهٔ بهرام معلمی

• Jaffe Arthur, "Appendix C. ordering the universe: the role of mathematics," *Renewing U.S. Mathematics, Critical Resource for the Future*, National Academic Press, Washington D. C. (1984) 117-162.

• آرتور جفی، دانشگاه هاروارد

1. Belousov-Zhabotinski