نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۲، مرداد ۱۳۶۷

صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات*

(۲)

آرتور جفی*

۳. فیزیک ریاضی

درفیزیک نظری‌نوین به‌روشنی دیده می‌شود که چگونه فیزیک و ریاضی مکمل یکدیگرند. حوزه‌هایی از ریاضیات به‌تمامی از بطن تلاشهایی زاده شده‌اند که برای درک قوانین فیزیک صورت گرفته است. و برعکس، ریاضیات به‌زبان فیزیک تبدیل شده است. در یک نگاه کلی می‌توان دراین دوموضوع پیشرفتهایی موازی را مشاهده کرد. دراینجا چند مورد از کامیابیهای فیزیک ریاضی‌را توصیف می کنیم.

نظریهٔ گروهها و مکانیک کوانتومی

نظریهٔ‌نمایشهای گروه بانظریهٔ کوانتومی، و به‌طور کلیتر با فهم تقارنهای طبیعت، ارتباط گسترده‌ای داشته است. شیئی را متقارن گویند که تحت تبدیلی اساساً بدون‌تغییر باقی بماند. مثلاً، اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌اندازهٔ ۱۲۰ درجه حول مرکزش بچرخد، بدون تغییر باقی می‌ماند. نظریهٔ گروهها پیش‌ازآنکه مطالعهٔ یک شیء باشد مطالعهٔ تبدیلهایی است که آن شیء را بدون تغییر نگه می‌دارند.

در اواخر قرن هیجدهم، لژاندر به اهمیت (گروه) جایگشتهای ریشه‌ها برای فهم معادلات درجهٔ سوم و چهارم پی برد. اما، چندین سال گذشت تا اینکه درسال ۱۸۳۲ گالوا اهمیت مطالعهٔ ساختار کلی جایگشتهای ریشه‌ها را برای‌تمام معادلات چندجمله‌ای دریافت. عموماً کشف گروه گالوا را تولد نظریهٔ گروهها می‌دانند.

همین که مفهوم مجرد گروه فرمولبندی شد، چندین‌تحول عمده پیش آمد. فلیکس کلاین تشخیص داد که گروهها ابزار طبیعی مطالعهٔ تقارن هندسی هستند. تقریباً درهمان زمان، سوفوس لی[1] ارتباط بین گروهها و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل راکشف کرد. دراین ضمن نظریهٔ نمایشهای گروه باکار فروبنیوس، الی کارتان، و سایرین که‌نظریهٔ‌تجریدی گروهها را به‌گروههای ماتریسی مشخص ربط دادند، به تدریج به وجود آمد؛ گفته می‌شد ماتریسها گروه را «نمایش» می‌دهند.

اما، به‌یاد داشته باشید که در دوره‌ای ۱۰۰ ساله که درخلال آن نظریهٔ‌گروهها پدید آمد وتکامل یافت، فیزیکدانان و دانشمندان تجربی عملاً آن را نادیده گرفتند. با این حال نظریهٔ گروهها به‌طور معجزه‌آسایی برای فیزیک، هم فیزیک کلاسیک و هم حتی به طور اساسی‌تری برای فیزیک کوانتومی، مناسب بود.

در مکانیک کلاسیک، نوتر[1] ارتباط کلی میان گروههای تقارن و قوانین‌بقای مکانیک کلاسیک، مانند بقای‌انرژی یا بقای تکانهٔ زاویه‌ای، را نشان داد. این ارتباط در مکانیک‌کوانتومی خیره‌کننده‌تر بود. این کشف اسپین الکترون در ۱۹۲۵ و کار ویگنر[2] و وایل[3] که اسپین را به‌صورت نمودی ازنظریهٔ‌گروهها تعبیر کردند، تنها اندک زمانی‌فاصله بود. مسأله، نحوهٔ توضیح وجود دوحالت الکترون–اسپین بالا واسپین پایین – بود؛ این حالتها به‌نوبهٔ خود شکافتگی خطوط طیفی نور را وقتی که‌اتمهای تورگسیل، درمیدانی مغناطیسی قرارمی‌گرفتند، توضیح می‌دادند. پاسخ این‌مسأله در گرو فهم گروهی است به‌نام SU(۲)، که به‌طور طبیعی به‌گروه تقارنهای دورانی فضای سه‌بعدی که درآن زندگی‌می کنیم، ارتباط پیدا می کند. دوحالت اسپینی‌الکترون به‌عنوان عناصر یک «نمایش بنیادی» SU(۲) تعبیر می‌شوند.

پس‌ازاین کشف، نظریهٔ گروهها به‌ابزاری محوری درفیزیک وشیمی تبدیل شد. مثلاً، رده‌بندی طیفهای گسیلی و جذبی اتمها و مولکولها (از جمله تحلیل کیفی و کمی طیف‌نمایی اتمی و مولکولی) به‌مطالعهٔ نمایشهای گروه جایگشتی و گروه SU(۲) تبدیل‌شد. درفضای سه‌بعدی پتانسیل کولنی دراثر دوران دستخوش تغییر نمی‌شود. نمایشهای گروه دقیقاً توصیف می کنند که چگونه‌گاهی یک حالت فیزیکی نمی‌تواند تقارن کامل دورانی نیروی مربوطه را داشته باشد. زیرگروههای تقارنهای دورانی با بعد متناهی (گروههای نقطه‌ای)، تقارنهای بلوری و بسیاری از دیگر تقارنهای فیزیک و شیمی مادهٔ چگال را توصیف می کنند.

پائولی در۱۹۲۶ تقارن‌دیگری درنیروی کولنی کشف کرد، تقارنی متفاوت با تقارن دورانی که در بالا پیرامون آن بحث کردیم. این تقارن ازبرداشتی ازنظریهٔ لی، وقتی که بر «خروج ازمرکز» یک مدار بیضوی کلاسیک اعمال شود، ناشی‌می‌شد. (این‌خروج ازمرکز ناوردای حرکت، که لاپلاس، رونگه[4]، و لنز[5] آن‌را بررسی کرده بودند، نشان می‌دهد که چقدر بیضی موردنظر بادایره تفاوت‌دارد.) خواص این‌تقارن اضافی، پائولی را به‌تصویری ساده و زیبا ازاتم هیدروژن درمکانیک کوانتومی راهبری کرد. نکتهٔ مهمتر اینکه، این کار راهگشای ایدهٔ مطالعهٔ تقارن فضا-زمان درارتباط با سایر انواع تقارن بود.

1. Lie

1. Noether 2. E. Wigner 3. Weyl

4. Runge 5. Lenz

وقتی درسال ۱۹۳۹ ویگنر نمایشهای انرژی مثبت نسبیت خاص، یعنی، نمایشهای گروه اینشتین، لورنتس، و پوانکاره را تحلیل کرد، گامی بزرگ به پیش برداشته شد. برای حل این مسأله لازم بود ابزارهای ریاضی آن روز تعمیم یابد، و ویگنر کار کلاسیک فروبنیوس را شالوده قرار داد. یکی از نتایج تحلیل او این است که هر نمایش گروه نسبیت با دوعدد ذاتی، «جرم» و «اسپین» آن، مشخص می شود. بدین‌ترتیب، جرم و اسپین از یك تقارن بنیادی، یعنی نسبیت خاص، استنتاج می‌شوند. پس‌ازاین کشف، می‌توان‌هرذرهٔ فیزیکی را درنظریهٔ کوانتومی به‌عنوان یك شیء ریاضی، یعنی یك‌نمایش گروه، تعبیر کرد.

بعداً در نظریهٔ ریاضی گروههای لی و نمایشهای آنها، پیشرفت حیرت‌آوری رخ‌داد. این پیشرفتهای‌محض‌ریاضی، به‌نوبهٔ خود نقشی محوری را در نظریهٔ نوین اعداد، هندسه، نظریهٔ ارگودیك، و مانند آنها، ایفا کردند. این روند، نه تنها در زمینهٔ گروههای لی بلکه در حوزهٔ گروههای با بعد نامتناهی، مانند گروههای دیفئومرفیسم، گروه وایل، و گروههای پیمانه‌ای، ادامه دارد.

این‌نظریهٔ نمایشها بعداً درپدیدآوردن ایده‌های‌انقلابی درفیزیك نقشی‌ایفا کرد. نظریهٔ گروهها، ابتدا برای توصیف قوانین‌طبیعت به‌کار رفت. بعداً دیدگاه نوینی پدید آمد که به‌موجب آن گروهها عملاً ابزاری برای بیان این قوانین شدند. زمان زیادی سپری نشده بود که‌فیزیکدانان‌تقارنهای دیگری‌را به‌جای تقارنهای فضا-زمان به‌عنوان تقارنهای بنیادی طبیعت پذیرفتند. نیروهای هسته‌ای به بار الکتریکی ذرات مربوطه بستگی ندارند. هایزنبرگ این‌عدم بستگی را به‌عنوان تقارن‌نیروی هسته‌ای‌تحت‌تبدیلی که‌پروتونها ونوترونهارا به‌هم‌مربوط می‌سازد، توصیف کرد. او این را «اسپین ایزوتوپی» نامید و پروتون و نوترون‌را دوحالت مختلف ازیك‌ذره، یعنی نوکلئون، درنظر گرفت. این دوحالت با یك نمایش دوبعدی SU(۲) مشخص می‌شود.

این دیدگاه نه تنها به‌صورت دیدگاه رایج درآمده است، بلکه به‌طور چشمگیری هم توسعه یافته است. فیزیکدانان معتقد بودند که قوانین‌طبیعت تحت تقارنهای بازتابی‌معینی ناوردا هستند. تااواخردهٔ پنجاه،وقتی‌لی[1] و یانگ خاطرنشان ساختند که تقارن‌بازتاب آینه‌ای در فضای‌سه‌بعدی‌باید آزموده شود، وجود این‌تقارن‌مسلم پنداشته می‌شد. لی و یانگ آزمایشهایی‌را طراحی کردند که‌نشان می‌داد پاریته یکی‌از تقارنهای دقیق طبیعت نیست! در پی این دستاورد عظیم، این مسأله که کدام یك از تقارنهای ظاهری گسسته درطبیعت یافته می‌شوند در خط مقدم تحقیقات فیزیك جای داشته است.

چرا گاهی تقارنی که انتظارش می‌رود درطبیعت پیش‌نمی آید؟ هرچند ممکن است معادلات متقارن ساختار ساده‌ای داشته باشند، با این حال ممکن است طبیعت تقارن مورد نظر را نداشته باشد. ازسوی دیگرامکان‌جالبتری هم وجود دارد: قوانین‌خودشان تقارنی‌را دارند، اما جواب خاصی‌که مورد نظر ماست دارای آن تقارن نیست. مثلاً، پتانسیل گرانشی نیوتن تقارن دورانی دارد، اما مدارسیاره‌ای کلاسیك ضرورتاً دایره‌ای نیست ـ می‌تواند بیضوی یا هذلولوی باشد. با این حال، انتظار داریم که پایینترین‌حالت انرژی یك‌سیستم تمام تقارنهای خود قوانین را داشته باشد. در غیر این صورت، می گویند تقارن «شکسته» است.

تقارن شکسته نخستین بار درفیزیك مغناطش و درشیمی تبدیلهای فاز (مانند جوشیدن یا یخ زدن آب) ظاهر شد. تقارن شکسته در مدلی به وجود می آید که لنز و آیزینگ[2] درست کردند و درکار

1. Lee 2. Ising

مشهور پیرلس[1] در ۱۹۳۶ و اونساگر[2] در ۱۹۴۴ مورد مطالعه قرار گرفت. تقارن شکسته برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها درفیزیك آماری به‌مکانیسم استانده‌ای تبدیل شده است. فیزیکدانان نمی‌دانند که آیا نقض‌بقای پاریته را می‌توان به عنوان تقارن شکسته توصیف کرد یا خیر، اما در حقیقت تقارن شکسته در توصیف سایرجنبه‌های ذرات نقش تعیین کننده‌ای یافته است.

درآغاز دههٔ ۱۹۵۰ شتابدهنده‌های‌بزرگ دهها ذرهٔ جدید تولید کردند. بنابراین لازم بود، یا دست‌کم خیلی مطلوب بود، که آنها را به‌طور منسجمی‌توضیح دهند. چگونه می‌شدجرم، اسپین، وسایرخواص این‌ذرات را، مانند برهمکنشهای‌آنها با یکدیگر، توضیح داد؟ یك‌بار دیگر فیزیکدانان برای ساده‌کردن این مسأله به‌تقارن باز گشتند.

ریاضیدانان به‌دلایل مربوط به‌حوزهٔ کار خودشان نظریهٔ مجرد نمایش گروههای فشرده را تکامل بخشیده بودند. به‌طوری که دیده شد، این درك ازنمایشهای‌گروه دقیقاً اطلاعاتی را فراهم‌آورده است که درجستجوی قوانین طبیعت ضروری‌اند. در ۱۹۶۱، گلمان[3] و نیمن[4] گسترش‌تقارن پروتون-نوترون هایزنبرگ‌را به‌گروه‌بزرگتر SU(۳) پیشنهاد کردند. آنها درکنار توضیح استقلال بار از نیروی هسته‌ای رده‌بندی زیبای بسیاری ازذرات جدید به‌اعتبار خواص آنها، مطالب جدیدوشگفت‌انگیزی‌را هم اضافه‌کردند. تمام‌ذرات قابل‌مشاهدهٔ آشنا (پروتونها، نوترونها، مزونها، و مانندآنها) را می‌توان با حاصلضرب دونمایش بنیادی‌نمایش‌داد. هرمؤلفهٔ آن نمایشهای‌بنیادی، یك «کوارك» لقب گرفت.

این مدل ریاضی‌برای‌ذرات بنیادی مرکب از کوارکها، وجود و جرم ذرهٔ جدیدی به‌نام امگا را، که می‌بایست کیفیتی به‌نام «شگفتی» هم داشته باشد، پیشگویی کرد. پس‌از آنکه در ۱۹۶۴ ذرهٔ امگا را یافتند، تقارن SU(۳) پذیرفته‌شد، و همچنین کوارك نادیده به صورت مؤلفه‌ای بنیادی از قوانین طبیعت درآمد.

دربیست وپنج سال اخیر روشن شده است که‌گروهها و نمایشهای آنها برای فیزیك جدید ذرات‌همانقدراساسی‌اند که ابزارهای‌سنتی‌تر آنالیز مختلط و معادلات دیفرانسیل جزئی. آدمی وسوسه می‌شود که گاهی فکر کند برخی از جدیدترین پیشرفتهای‌نظریهٔ گروهها به‌فیزیك مربوط می‌شود. دونظریهٔ زیبای ریاضی عبارت‌اند از رده‌بندی گروههای متناهی (در ارتباط با کشف اخیر یك گروه «غول‌آسا») و ابرتقارن. فقط زمان است‌که روشن خواهد کرد آیا طبیعت به‌نحو مناسبی این مفاهیم ریاضی را می‌پذیرد یا خیر.

هندسهٔ دیفرانسیل و فیزیك

مراحل اولیهٔ تاریخ هندسهٔ دیفرانسیل به‌کار فرما در زمینهٔ منحنیها در قرن هفدهم، و به‌گاوس که درقرن نوزدهم انحنای رویه‌ها را مورد مطالعه قرار داد، مربوط می‌شود. دیدگاه گاوس را می‌توان رهیافت ملموس و واقعی نامید، زیرا او رویه‌های غوطه‌ور در یك فضای اقلیدسی با بعد بالاتر را مورد مطالعه قرار داد. ریمان هندسهٔ ذاتی رویه‌ها را در سال ۱۸۵۴ فرمولبندی کرد. سرانجام هندسه، مفاهیم جبری تقارن وگروهها را وحدت بخشید. آنچه‌که ظاهر شد آنالیز تانسوری بود، مبحثی که بیانکی[5]، لوی‌چیویتا[6]، کریستوفل، ریچی[7]، وسایرین آن را بنیاد نهادند.

1. Peierls 2. Onsager 3. Gell-Mann
4. Neeman 5. Bianchi 6. Levi-Civita
7. Ricci

اینشتین با پیشنهاد نظریهٔ نسبیت عام در ۱۹۱۵؛ همین چارچوب فکری را برای توضیح ایده‌های بنیادی خود دربارهٔ گرانش اختیار کرد. معادلهٔ اساسی اینشتین انحنای فضا را متناسب با چگالی انرژی قرار می‌دهد؛ ثابت بنیادی این تناسب، بنا به تعریف، ثابت گرانشی است. از این دیدگاه، نیروی گرانشی نتیجهٔ انحنای فضاست. نظریهٔ نسبیت، قانون نیروی نیوتن دربارهٔ گرانش را به‌عنوان حالت حدی یك فضا-زمان با انحنای ناچیز نتیجه می‌دهد.

نیروی بنیادی دیگر فیزیك كلاسیك، الكترومغناطیس است. در ۱۹۱۸ هرمان وایل[1] كه ریاضیدان بود، به این نتیجه رسید كه می‌توان درصورت لزوم نیروهای الكترومغناطیس را از هندسهٔ فضا استنباط كرد. او مطالعات خود را برپایهٔ تبدیلات مقیاس فضا بنا نهاد؛ به‌همین دلیل او الكترومغناطیس را «نظریهٔ پیمانه‌ای» نامید.

درآن زمان به این پیشرفت مفهومی ارج زیادی ننهادند؛ اما تصویر پیمانه‌ای عاقبت به‌تلاش جدید ما در راستای وحدت بخشیدن چهار نیروی بنیادی: گرانش، الكترومغناطیس، قوی، وضعیف، انجامید. آنچه كه چهل سال بعد فیزیكدانان را حیرت‌زده كرد تعمیم ساده و ژرفی بود از الكترودینامیك (آن‌طور كه از ۱۸۷۳ به كمك معادلات اساسی ماكسول توصیف شده بود و با تعبیرمجددی كه وایل از آن می‌كند، و به‌همراه معادلات دیراك). در ۱۹۵۴، یانگ و میلز اظهار داشتند كه گروه تقارن پایهٔ الكترومغناطیس، برای آنكه گروه توصیف كنندهٔ تقارن نیروهای قوی را در برگیرد، باید گسترش یابد. آنها ساده‌ترین معادلاتی را كه با این ناوردایی سازگار بود، و درمورد نیروهای صرفاً الكترومغناطیسی به معادلات ماكسول كاهش می‌یافتند، مورد نظر قرار دادند. این مبحث را امروزه «نظریهٔ پیمانه‌ای غیرآبلی» می‌گویند، زیرا گروه تقارن پایه، گروهی تعویض‌ناپذیر است. در اینجا انتخاب گروه ویژه‌ای از تقارنها برای فیزیك اهمیت اساسی دارد؛ و این مثال صریحی است از این فلسفه كه كشف گروه تقارن، جزئی از یافتن قوانین طبیعت است.

مفهوم نظریهٔ پیمانه‌ای یانگ-میلز اصلاً تازگی نداشت. چندسالی پیش از آن، ریاضیدانان مفهوم هندسی همه‌جایی كلاف تار را معرفی كرده و هندسهٔ ریمانی را درنظریهٔ كلاف تار درقالبی نو ریخته بودند. كلاف تار فضایی است متشكل از تعداد زیادی فضای مشابه كه به هم چسبانده‌شده‌اند. مثلاً، چنبره (دونات) را می‌توان با چسباندن متوالی مقاطع دایره‌ای به‌هم به‌وجود آورد. ریاضیدانان مفهوم «همو‌ستار» را به‌عنوان كمیتی برای اندازه‌گیری پیچش موضعی ناشی از انحنای چنین فضایی، معرفی كردند. نظریهٔ خارق‌العاده‌ای پرداخته شد، كه مطالعهٔ توپولوژی (خواص همه‌جایی) فضاهای مجرد با انحنا را دربرداشت. بسیاری از ناورداهای جبری و هندسی، مانند اعداد چرن[2]، رده‌های استیفل-ویتنی[3]، ناورداهای شاخصی آتیا[4]، سینگر، هرتسبروخ[5]، ویل[6]، بوت[7]، و سایرین، به‌عنوان جزئی از این نظریهٔ كلی كشف شدند. آنچه فیزیكدانان به این تصویر افزوده‌اند مفهوم یافتن چنین ساختارهایی به عنوان جوابهای دستگاهی از معادلات وردشی بود. این معادلات دیفرانسیل غیرخطی كه هموستار در آنها صدق می‌كند، تعمیم طبیعی معادلهٔ لاپلاس در چارچوب هندسهٔ دیفرانسیل هستند.

با یك شرح تكنیكی روشن، موضوع را بازگویی می‌كنیم. در معادلات اصلی ماكسول، میدان الكتریكی $E(x, t)$ و میدان مغناطیسی $B(x, t)$ بردارند، یعنی اشیایی سه‌مؤلفه‌ای هستند. هر كدام از مؤلفه‌های این بردارها تابعی است حقیقی روی فضا-زمان؛ دیدگاه نوین نظریهٔ پیمانه‌ای، توابع مؤلفه‌ای $E_i(x, t)$ را به‌عنوان عناصر جبر لی گروه پیمانه‌ای در نظر می‌گیرد. درمورد الكترومغناطیس، این گروه، U(۱) است كه جبر لی آن صرفاً خط حقیقی است، و توابع حقیقی معمولی $E_i(x, t)$ را به‌همان ترتیبی كه در نظریهٔ ماكسول آمده است، به‌دست می‌دهد. تعمیم یانگ و میلز، عبارت بود از اینكه گروه ماتریسی فشردهٔ بزرگتری كه جبر لی آن مشتمل بر ماتریسهای تعویض‌ناپذیر است، به جای U(۱) قرار گیرد. بدینسان هرمؤلفهٔ میدان الكتریكی و مغناطیسی، به‌جای عدد، ماتریس است. همچنان كه حركت در فضا و زمان صورت می‌گیرد، این ماتریس از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر تغییر می‌كند. درحالی كه فیزیكدانان هنوز هم مطمئن نیستند كه كدام گروه را به‌عنوان گروه بنیادی برگزینند، یك نامزد نوعی می‌تواند SU(۳) یا SU(۲) یا SU(۱) باشد، كه به‌ترتیب، تقارنهای شناخته شدهٔ نیروهای قوی، نیروهای ضعیف، و نیروهای الكترومغناطیسی را مشخص می‌كنند.

آنالیز و میدانهای كوانتومی

فیزیكدانان بیش از شصت سال است به این اعتقاد رسیده‌اند كه نظریهٔ كوانتومی چارچوب صحیحی را برای توصیف ذرات بنیادی به‌دست می‌دهد. بنابراین، فیزیك نوین باید نظریه‌ای ریاضی بیابد كه نظریه‌ای پیمانه‌ای، و همچنین مكانیك كوانتومی و نسبیت خاص را دربرداشته باشد. چنین تركیبی را نظریهٔ میدان كوانتومی می‌گویند. سایر مثالهای مربوط به معادلات میدان عبارت‌اند از معادلات دیراك درمورد الكترون، معادلات موج اسكالر غیرخطی، و معادلات اینشتین دربارهٔ گرانش.

جستجوی سرشار از تلاش و پیچیده در پی بنیان ریاضی فیزیك كوانتومی، منبع الهام ریاضیات جدیدی بوده و باعث شده است قدمهای مهمی درراه افزایش بصیرت ما نسبت به فیزیك برداشته شود. درحال حاضر این جستجو، فرصت مهیجی برای متحدكردن این دو علم بنیادی فراهم آورده است.

درهمان دههٔ ۱۹۲۰ كه مكانیك كوانتومی زاده شد، بسیاری از بزرگترین ریاضیدانان دنیا، مثل هیلبرت، فون نویمان، و وایل، سخت مجذوب این فیزیك جدید شدند. ریاضیات انتشار موج، معادلات انتگرالی، معادلات دیفرانسیل، مسائل ویژه‌مقدار، آنالیز خطی، نظریهٔ احتمال و نظریهٔ گروهها، جملگی درفهم نظریهٔ كوانتومی غیرنسبیتی مهم بودند. این حوزه‌های ریاضیات برتمام حوزه‌های فیزیك و مهندسی جدید نیز تأثیر ژرفی داشته‌اند.

حال توجه خود را روی معمایی درفیزیك ریاضی متمركز می‌كنیم كه در دههٔ ۱۹۳۰ با تلاش برای واردكردن پدیده‌های معینی در نظریهٔ كوانتومی پدیدار شد. این پدیده‌ها ناشی از این‌اند كه ذرات می‌توانند به‌طور غیرمستقیم، از طریق اثراتشان برسایر ذرات، برخودشان تأثیر گذارند. مثلاً، به كمك آزمایشی معمولی می‌توان بسامد (طیف رنگ) نور گسیلیده از یك اتم برانگیخته را اندازه گرفت. در این فرایند، نور با اتم برهمكنش دارد، درحالی كه اتم نیز به‌نوبهٔ خود با نور برهمكنش دارد. در اثر این چرخهٔ تأثیرات، نور می‌تواند برخودش تأثیر بگذارد، و گفته می‌شود این پدیده غیرخطی است. اما، هر تلاشی برای استنتاج انتقالهای بسامدی قابل مشاهده از این سیستم غیرخطی، به پاسخهای نامتناهی منجر می‌شود!

---

1. H.Weyl
2. Chern
3. Steifel-Whitney
4. Atiyah
5. Hirzebruch
6. Weil
7. Bott

در ۱۹۴۷، کنفرانسی در شلتر آیلند[1] تشکیل شد که توجه آن معطوف به مسائل حل نشدهٔ عمدهٔ فیزیک نظری و جهت دادن به تحقیقات پژوهشگران در دورهٔ بعد از جنگ بود. این کنفرانس از آن بابت مشهور شد که موجب فرمولبندی و کاربرد مجموعه‌ای از قواعد برای انجام محاسبات غامض شد؛ در این قواعد کمیتهایی بی‌معنی چون بینهایت یا تقسیم بر صفر، یعنی ۱/۰، به‌طور سیستماتیک نادیده گرفته می‌شد. با این حال جوابهای معینی به‌دست می‌آمد.

توجه فیزیکدانان به درک تصحیح اندکی در طیف نور گسیلیده به‌وسیلهٔ هیدروژن معطوف شده بود. این تصحیح که به‌تازگی مشاهده شده بود، امروزه جابه‌جایی لمب نامیده می‌شود. اثر دیگر برهمکنش غیرخطی به‌مقدار انرژی یک تک‌الکترون در میدانی مغناطیسی مربوط می‌شود. بنابر نظریهٔ دیراک، مقدار این انرژی مغناطیسی، یا «گشتاور مغناطیسی»، برحسب یکاهای بدون بعد استانده باید دقیقاً برابر ۲ می‌بود. درواقع قواعد نظریهٔ میدان کوانتومی عدد ۲٫۰۰۲ را پیشگویی کرده بودند، وانحراف ۰٫۰۰۲ از ۲ را گشتاور مغناطیسی «بی‌هنجار» نام نهادند.

درسی و پنج سال گذشته، تعداد بیشماری از فیزیکدانان کار گشته استفاده از این قواعد را در چند جملهٔ اول یک سری توانی در روابط مربوط به بار الکتریکی مجاز دانسته‌اند. این محاسبات تعیین مقدار دقیق هزاران انتگرال را ممکن می‌سازند. این برنامه چندان گسترده است که تنها برای انجام عملیات جبری آن از کامپیوترهای بزرگ یاری گرفته شد. نتیجه، دقیقاً گشتاور مغناطیسی الکترون را پیشگویی می‌کند. در قلمرو آزمایش، انجام اصلاحاتی در طی سالها، به‌مقدار مشاهده‌ای کنونی یعنی ۲٫۰۰۲۳۱۹۳۰۴، که یکی از دقیقترین کمیتهای اندازه‌گیری‌شده در فیزیک است، منجر شد. عدد محاسبه‌شده تا آخرین رقم اعشار با مشاهده سازگار است. به علت این تطابق خارق‌العاده میان آزمایش و پیشگویی، قواعدی که اساس محاسبه هستند جدی گرفته می‌شوند. به زودی، قواعد نادیده گرفتن بینهایتها در فیزیک به‌عنوان «نظریهٔ الکترودینامیک کوانتومی» شناخته شد.

توانایی نظریهٔ کوانتومی در توضیح جابه‌جایی لمب و گشتاور مغناطیسی بی‌هنجار، زمینه را برای آغاز دوران جدیدی در فیزیک کوانتومی مهیا کرد. تکامل این ایده‌ها سرانجام به‌نظریه‌های یانگ‌ـ‌میلز انجامید که آنها را در بخش پیش تشریح کردیم. فیزیکدانان، در پرتو کارهای دیگری که بیست سال به‌درازا کشید، به‌اینجا رسیدند که گروه تقارن SU(۲)×SU(۱) را برای توصیف کردن و وحدت بخشیدن دونیروی بنیادی طبیعت: نیروهای الکترومغناطیسی و نیروهای ضعیف، برگزینند. گلاشو[2]، عبدالسلام، و واینبرگ به‌خاطر کاری که در این زمینه کردند، به‌جایزهٔ نوبل ۱۹۷۹ دست یافتند. نظریهٔ پیمانه‌ای SU(۵) نیز، طی پیشنهادی جالبتر، نیروهای قوی را نیز وارد اتحاد می‌کند. این نظریهٔ «وحدت بزرگ» پیشگویی می‌کند که پروتون ناپایدار است ــ یعنی، پروتون سرانجام واپاشیده خواهد شد.

در آزمایشهای بزرگی که برای تحقیق درمورد چنین واپاشیی در جریان است، تاکنون این پدیده مشاهده نشده است. در هرحال، نظریهٔ میدان کوانتومی به‌صورت شالودهٔ فیزیک کوانتومی پذیرفته شده است.

اما، در اینجا «نظریه» به‌معنی سنتی آن به‌کار نمی‌رود، و دست کم با استانده‌های توضیح علمی که پیش از عصر میدانهای کوانتومی در فیزیک معمول بود منطبق نیست. به علت وجود کمیتهای نامتناهی (یا بد تعریف) که فیزیکدانها در ابتدا درجریان فرمولبندی قواعد خود از آنها چشم پوشیدند، این سؤال مطرح می‌شود که آیا این روش در واقع دارای فرمولبندیی هست که از لحاظ ریاضی سازگار باشد؟ به‌بیان دیگر: «آیا نسبیت با نظریهٔ کوانتومی می‌تواند به‌صورت بخشی از ریاضیات سنتی ترکیب شود؟»

قواعد مربوط به کمیتهای نامتناهی که در بالا توصیف کردیم، در فیزیک «بازبهنجارش» نامیده می‌شوند. امروزه، بعد از حدود چهل سال، تنها جزئی از این مسأله را فهمیده‌اند. اما پیشرفتهای ریاضیات به‌درک نظریهٔ میدان کوانتومی کمک کرده است و به‌فرمولبندیی انجامیده است که ما معتقدیم موفق خواهد شد. این فرمولبندی، تعمیمی از هردو حساب دیفرانسیل و انتگرال است تا حالتی را که توابع مجهول به‌تعداد نامتناهی متغیر وابسته‌اند، دربر گیرد.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی، از توابعی چون $f(x)$ مشتق و انتگرال می‌گیرند، که x نقطه‌ای است در فضایی با بعد متناهی. این تعمیم به توابع $f(x)$ ای نظر دارد که در آن تعداد راستاهای مختصاتی متغیر x بینهایت است. مبحثی که با مشتق گیری و انتگرال گیری از تعدادی نامتناهی راستای مختصاتی سروکار دارد «حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعی» نام گرفته است.

حساب دیفرانسیل تابعی از کارهای ویتو ولترا[1]، ریاضیدان مشهور ایتالیایی، در مطالعاتی که اوایل این قرن در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی عام انجام داد، آغاز می‌شود. پیشرفتهای گستردهٔ این ایده‌ها تاکنون ادامه یافته است، و حوزهٔ آنالیز تابعی همچنان نقش محوری خود را در فیزیک حفظ کرده است.

درسالهای اخیر حساب انتگرال تابعی نیز نقشی عمده ایفا کرده است. ایده‌های اولیه در این حوزه، در نظریهٔ احتمالی که نوربرت وینر ارائه کرد، ظاهر شد. او درجریان تلاش برای فهمیدن پخش و حرکت براونی به‌تجرید انتگرالهای تابعی دست یافت و به این ترتیب، وینر توانست جواب معادلهٔ پخش گرما را به‌صورت انتگرالی روی مسیرهای کلاسیک ذره نشان دهد. در فیزیک، در دههٔ ۱۹۴۰، برپایهٔ کارهای پل آدرین موریس دیراک و ریچارد فاینمن دیدگاهی مرتبط با این موضوع ظاهر شد؛ و امروز این دیدگاه را در فیزیک، رهیافت «جمع روی تاریخها» به‌نظریهٔ کوانتومی می‌نامند. ارتباط میان این دو ایده به درک این نکته انجامیده است که چگونه انتگرال وینر برای فیزیک مناسب است. این ارتباط راه را برای تکامل ریاضی «انتگرالهای تابعی» گشود؛ راهی که آغازگر آن در دههٔ ۱۹۵۰، کاک[2]، گلفاند[3]، و چند تن دیگر بودند.

سرانجام حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعی اخیراً تا آنجا پیش رفته است که می‌تواند در نظریهٔ میدان کوانتومی و برای غلبه بر نامتناهیهای بازبهنجارش به‌کار رود. این قلمرو نسبتاً نوین ریاضیات و فیزیک، درشکل جدیدش، «نظریهٔ میدان ساختنی» نام گرفته است.

اتحاد مجدد ریاضیات با فیزیک

بحث بالا آشکارا به پیشرفت و تکامل مهیجی اشاره دارد که هم‌اکنون درحال وقوع است، یعنی اتحاد مجدد ریاضیات با فیزیک نظری. پس ازظهور نظریهٔ کوانتومی در دههٔ ۱۹۲۰، ریاضیات و فیزیک نظری از هم دور شدند. شاید فیزیکدانان عقیده داشتند که ارائهٔ توضیحی کامل درچارچوب سنتی، و درهمان حال دست‌یافتن به‌بینشی نسبت به‌مجموعهٔ پدیده‌های فیزیکی که هردم پیچیده‌تر می‌شود ناممکن است. ازسوی دیگر، ریاضیدانان فهم فیزیک را دشوار می‌یافتند زیرا مبانی آن، از

1. Shelter Island 2. Glashow

1. Vito Volterra 2. M.Kac 3. I. Gelfand

دیدگاه ایشان به‌طور مناسبی تبیین نمی‌شد. به‌دلایلی، هر کدام از این دوموضوع، واژگان خاص خود را پدید می‌آورد که اشراف بر آنها برای متخصص موضوع دیگر دشوار بود. آنچه شرایط را بدتر می‌کرد، این بود کـه مطالعهٔ یکی از این دوموضوع تـوسط متخصصین شاخهٔ دیگر، عموماً به‌سرخوردگی می‌انجامید.

چند دهـهٔ گذشته شاهـد پدیـد آمدن تغییرات ژرفی در هر دو موضوع به‌دلیل وحدت درونی هریك از آنها بوده است. ریاضیدانان روابط عمیقی‌را میان نظریهٔ گروهها، توپولوژی، هندسهٔ جبری، هندسهٔ دیفرانسیل، آنالیز، و نظریـهٔ اعـداد، کشف کردنـد. در این ضمن فیزیکدانان به وجود ارتباطهای روشنی میان فیزیك ذره، فیزیك مادهٔ چگال، و سرانجام اخترفیزیك، پی‌بردند. بیست سال پیش‌از این یك استاد ریاضی و یك استاد فیزیك کـه در دانشگاه واحـدی تـدریس می‌کردند، به‌ندرت تماس‌علمی با یکدیگر داشتند. ولی امروز، ما از به‌هم پیوستن نظامهای ریاضیات و فیزیك احساس هیجان می‌کنیم.

برای روشن‌کردن این پدیده، دراینجا چندین مـورد ازکارهای جاری را به‌صورت نمونه ذکر می‌کنیم. نظریهٔ میدان ساختنی، که آن را گلیم[1]، یافه[2]، وسایرین پرداختند، قسمت عمدهٔ اسرار پنجاه سالـهٔ مبانی نظریهٔ میدان را فاش ساخته است. قلمرو جدیدی در ریاضیات پیدا شده است که چارچوبی کلی، ملهم ازفیزیك، فراهم می‌کندکه در آن چارچوب می‌توان پـرسشها را پاسخ داد. نظریـه‌ای کامل، شامل باز بهنجارش، برای چندین مثال میدان کوانتومی پرداخته شده است. علت عمدهٔ این نکته که پاسخهای کنونی ناکامل‌اند این است که این مثالها معادلات ازپیش فرض شدهٔ فیزیك را ساده می‌کنند.

از دیـدگاه حساب انتگرال تابعی، نظریهٔ میدان کوانتومـی را می‌توان مطالعهٔ یك توزیـع احتمال برای میدانهای کلاسیك دانست. به‌این ترتیب، تعمیمی از نظریهٔ احتمال، با ویژگیهای جدید و جالب ریاضی، پا به‌عرصه می‌گذارد؛ مسائل ریاضی مشابهی درفیزیك‌آماری کلاسیك پدید می‌آید. رابطهٔ میان این مباحث درسطحی بنیادی علت این موضوع را هم توضیح می‌دهدکه چرا پدیده‌های شناخته شده در فیزیك آماری ـ گذارهای فاز وشکستن تقارن ـ درفیزیك کوانتومی هم ظاهر می‌شوند.

کرنل گرمایی $\exp(-tH)$ فرایندی تصادفی به‌وجود می‌آورد که با زمان برچسب‌گذاری می‌شود. این فرایندهای تصادفی هـم در ریاضیات محض (هندسه و توپولوژی، و آنالیز) به‌وجود می‌آیند، و هـم در بسیاری از حوزه‌های کاربردی، مانند مهندسی برق، نظریـهٔ کنتـرل استوکاستیك، و احتمالاً در اقتصادسنـجـی و زیست‌شناسی جمعیت. میدان تصادفی را (که با فضا وزمان برچسب‌گذاری‌می‌شود)، لاپلاسی H که دارای بعد نامتناهی‌است تولید می‌کند. تصورمی‌کنیم که نظریـهٔ مجرد وکاربردهای آن به‌همان میزان نظریه وکاربـردهای فرایندی تصادفی‌که تنها با زمان برچسب‌گذاری می‌شود، غنی باشد. مثلاً، روشهای انتگرال تابعی ـ و مسائل مربوط به آنها در معادلات دیفرانسیل استوکاستیك ـ در ارتباط نزدیك بانظریهٔ نمایش مربوط به گروههای با بعـد نـامتناهی، مـانند «گـروههای حلقه‌ای»، ظاهـر می‌شوند.

موضع‌یابی سلول فاز و گروه باز بهنجارش، دو ایـدهٔ مفید؛ در مطالعهٔ ریاضی بازبهنجارش هستند؛ این دوایده در راه فهم گذارهای فاز درفیزیك نیز کاربردهای سودمندی داشته‌اند. در ریاضیات، مفاهیم مربوطه در نظریهٔ آنالیز ریزموضعی[3] و درآنالیز همساز، مانند بررسی ففرمن[1] دربارهٔ طیف لاپلاسی با استفاده از «اصل عدم قطعیت» هایزنبرگ، ظاهر می‌شوند. انتظار داریم چنین روابطی به‌مـوقع خـود روشنتـر شوند.

قبلاً از توجه محوری به‌مسائل هندسی در فیزیك یادکرده‌ایـم. یکی ازمعماهای اخیر در نظریهٔ نسبیت کلاسیك، چگونگی تعیین «انرژی» کل کیهان بود. فیزیکدانان در مـورد فضاهایی کـه انحنای آنها در بینهایت به‌سرعت از بین می‌رود تعریفی برای انرژی پیشنهاد کرده‌اند. خاصیت مهم مثبت بودن انرژی (که در نظریهٔ کوانتومی نیز در قلب کارهای مربوط به نظریهٔ میدان ساختنی قرار دارد) دو دهـهٔ بعد، در حدود سال ۱۹۸۰، به وسیلهٔ هندسه‌دانانی چون شوئن[2] و یائو[3]، ارائه شد. روش آنها برای حل این مسألهٔ فیزیکی، نظریهٔ ریاضی رویه‌های مینیمال را به‌شیوه‌ای تکامل بخشیدکـه برای مطالعهٔ آتـی نگاشتهای همساز تکین و معادلات دیفرانسیل غیرخطی اهمیت داشت.

در ده یا پانزده سال اخیر ریاضیدانان و فیزیکدانان دریافته‌اند کـه هندسهٔ جدید در واقع چارچوب ریاضی طبیعی برای نظریـهٔ پیمانه‌ای است. پتانـسیل پیمانـه‌ای فیزیك، هموستار ریاضیات است. میدان پیمانه‌ای همان‌انحنای ریاضی است‌که به‌وسیلهٔ هموستار تعریف می‌شود؛ بعضی از «بارهای» فیزیك، ناورداهای توپولوژیکی‌اندکـه توسط ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

درحالی‌که ریاضیدانان و فیزیکدانان به‌طور جداگانه پیرامون ایده‌هایـی مشابـه کار مـی‌کردنـد، صرفاً کار یکـدیگر را تکـرار نمی‌کردنـد. ریاضیدانان نظریـه‌های عام، وگسترده‌ای را به‌وجـود آوردنـد و انشعابها و فـرعیات آنها را مـورد پژوهش قراردادند، فیزیکدانان به‌جزئیات مثالهای مشخصی پرداختندکه معلوم شد طبیعت را به‌گونه‌ای زیبا و ظریف توصیف می‌کنند. وقتی این دوگـروه بار دیگر با هم روبه‌رو شدند، نتایجی حاصل شد کـه بیش ازحد انتظار قوی بود.

اکنـون، ما در ریاضیات انگیزهٔ جدیـدی داریـم تا بصیرتهای مشخصی راکه ازبعضی‌کارهای فیزیکدانان حاصل می‌شودبه‌کار گیریم. این امر نشانه‌ای است از بازگشت بـه یك سنت باستانی. درفیزیك، این بازگشت به‌صورت توجه به‌مسائل هندسی تجلی کرده است. یکی از جنبه‌های نظریهٔ ریاضی، کوانتش مشاهـده شدهٔ شار مغناطیسی در ابررساناها را تـوضیح می‌دهد. جنبهٔ دیگر که در نظریهٔ پیمانـه‌ای به‌خوبی موردمطالعه قرار گرفته وجود پیشگویی‌شدهٔ یك بار مغناطیسی بنیادی، یا تك‌قطبی، است، یعنی‌مغناطیسی با یك قطب شمال یاجنوب، اما نه هر دو. قسمتی از آزمایشهای جاری در جستجوی چنین ذره‌ای هستند، اما آن را پیدا نکرده‌اند.

فریدمن[4]، در سال ۱۹۸۱ حـدس پـوانکاره را در حالت چهار بعدی ثابت‌کرد؛ این مسأله‌حدود شصت سال حـل نشده باقی مانـده بـود. درآن زمان انتظار می‌رفت کـه رده‌بندی توپولوژیك فضاهای چهار بعدی توسط فریدمن، درحالتـی نیز کـه نوعی «هموار بـودن» به‌فضا اعمال می‌شود، برقراراست؛ دست‌کم شهود این طورمی‌گوید. ولی، قضیهٔ اخیر دانلدسن[5] می‌گویـد کـه این انتظار باطل است. بعداً معلوم شدکه نتایج ریاضی دربارهٔ نظریه‌های پیمانه‌ای کلاسیك، که تعبیر فیزیکی جوابها محرك آنها بوده، بسیار مهم‌اند. به‌عنوان یك نتیجهٔ فرعی، درمی‌یابیم که، یك ۴-فضای اقلیدسی «نامتعارف» وجود دارد. بسیاری ازتوپولوژیـدانها هم‌اکنون سرگرم مطالعهٔ نظریه‌های

1. Glimm 2. Jaffe 3. microlocal analysis

1. Fefferman 2. R.Schoen 3. St.T.Yau

4. M. Freedman 5. S. Donaldosn

پیمانه‌ای‌اند؛ فیزیکدانان اینک توپولوژی مطالعه می‌کنند. به نظر می‌رسد که از این سنتز، بینشهای غنی و نوینی نسبت به‌توپولوژی چهار بعدی حاصل خواهد شد.

پیشرفت جالب توجه دیگر درخلال همین چند سال گذشته مطالعهٔ جبرهای «ابر تقارن» و ساخت ابرخمینه‌هاست. ریاضیدانان ابرجبرها را به‌عنوان جبرهای مدرج شناخته‌اند، و یکی از راههای درك ابرتقارن استفاده ازهمباقت‌استانده دورام[1] است. فیزیك با ساختن ابر دروهها، ابرخمینه‌ها و ابرمیدانهای مربوط به‌این جبرها، مفاهیم نوینی را پدید آورد. عملگر لاپلاس (همیلتنی) را می‌توان به عنوان تابعی از ابرمیدانها نمایش داد. قضیهٔ شاخص آتیا ـ سینگر ـ یکی از کارهای مشعشع ریاضیات نوین که ایده‌هایی از توپولوژی، هندسه، و آنالیز را وحدت می‌بخشد ـ به‌کمك این روش قابل اثبات است. ابرتقارن دیدگاه نوینی نسبت به قضیهٔ شاخص ارائه می‌کند و آن را با برهمکنشها (لاگرانژیها)ی فیزیك جدید پیوند می‌دهد.

عجیب نیست که این کشف تخیل هندسه‌دانان وفیزیکدانان نظری، هردو، را برانگیخته است. کشف دیگر این است که «بی‌هنجاریها»ی فیزیك کوانتومی ـ معادلات کلاسیکی که درنظریهٔ کوانتومی اعتبار خود را از دست می‌دهند ـ را می‌توان به‌صورت جنبه‌ای ازنظریهٔ K، همان ماشین مجرد در توپولوژی وهندسهٔ مدرن، نگریست. در واقع نظریهٔ K ظاهراً حتی به‌طیف عملگرهای شرودینگر باپتانسیلهای شبه‌دوره‌ای مرتبط می‌شود. چنین معادلاتی ضمن توصیف خواص مغناطیسی مواد که دارای نقص تصادفی‌اند، ظاهر می‌شوند.

ما فقط لایهٔ نازکی از سطح ایده‌هایی را برداشته‌ایم که محمل طبیعی آنها فیزیك و ریاضیات، هردو، است. ظاهراً در آستانهٔ ورود به‌عصری هستیم که مرزهای ریاضیات و فیزیك نظری عملاً از میان می‌رود.

ترجمهٔ بهرام معلمی

1. De Rham

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• Jaffe Arthur, "Appendix C. ordering the universe: the role of Mathematics", *Renewing U.S. Mathematics, Critical Resource for the Future*, National Academic Press, Washingtion D. C. 1984, 117-162.

• آرتور جفی، دانشگاه هاروارد