چند پرسش از آرنولد

میشل اودَن، پاتریک ایگلزیاس
ترجمهٔ یوسف امیر ارجمند

ولادیمیرایگورویچ آرنولد ریاضیدان برجستهٔ روس برای خوانندگان نشر ریاضی ناشناخته نیست. قبلاً مصاحبه‌ای با او (شمارهٔ ۲، سال ۲) و مقاله‌ای از او (شمارهٔ ۳، سال ۴) در این مجله چاپ شده است. مصاحبه‌ای که در اینجا می‌خوانید از شمارهٔ آوریل ۱۹۹۲ مجلهٔ فرانسوی *Gazette des Mathématiciens* ترجمه شده و حاوی اطلاعات مفیدی دربارهٔ کارهای ریاضی آرنولد، محیط ریاضی شوروی و اوضاع پس از فروپاشی است.

• کدام یک از نتایجی را که به دست آورده‌اید از همه با اهمیت‌تر می‌دانید؟ فکر آن چطور پیدا شد و آن را چگونه به‌دست آورده‌اید؟

آرنولد: من نمی‌دانم اهمیت یک دستاورد ریاضی یعنی چه. احتمالاً کمیتی است‌که با میزان دشواریِ تکنیکی آن نسبت عکس دارد. شاید مهمترین کاری را که من در ریاضیات انجام داده‌ام اغلب به نام من نشناسند. بنابراین، کاری را ذکر می‌کنم که مورد علاقهٔ من است.

چند ماه قبل، هیروناکا روشی در مورد تحلیل خمهای جبری حقیقی برای من نقل کرد که از آن خوشش آمده بود. این روش برمبنای توپولوژی واریته‌های چهاربعدی است. واریتهٔ چهاربعدیی که به خم جبری در صفحهٔ تصویری مختلط وابسته می‌سازند پوشش مضاعف صفحه است که در امتداد خم انشعاب پیدا می‌کند. هیروناکا نمی‌دانست که این روش را من ابداع کرده‌ام [۱].

او تقصیری ندارد. اینکه معمول است یک نتیجه را به آخرین مؤلفی که از آن استفاده کرده و یا به کسی که آن را از او یاد گرفته‌اند نسبت دهند به پیشرفت علوم بسیار کمک کرده است. من مثال دیگری ذکر نخواهم کرد زیرا از ریاضیدانها و فیزیکدانهایی که تحقیقات مرا مورد استفاده قرار داده و ارائه می‌دهند بسیار سپاسگزارم. ذکر این نکته بی‌مناسبت نیست که آمریکا را هم کلمب نمی‌نامند و چنانکه ناباکوف گفته است، بهترین قدردانی از تولستوی ذکر نام او نیست بلکه ذکر نام آنا کارنینااست.

برگردیم به خمهای جبری. یادم هست که این پتروفسکی رئیس دانشگاه مسکو و آفرینندهٔ نظریهٔ واریته‌های جبری حقیقی [۳،۲] بود که از من خواست رسالهٔ گودکوف را بخوانم [۴]. گودکوف مسألهٔ شانزدهم هیلبرت در مورد پیکربندی هاگینه‌های خمهای جبری درجهٔ ۶ در صفحهٔ تصویری را حل کرده است. در این رسالهٔ بسیار مشکل، که هرگز آن را به‌دقت نخوانده‌ام، یک همنهشتی به پیمانهٔ ۸ که گودکوف آن را حدس زده بود، توجه مرا جلب کرد.

$$p - m \equiv k^2 \bmod 8$$

که در آن p تعداد هاگینه‌های یک خم هموار از درجهٔ $2k$ است که درون یک تعداد زوج از هاگینه‌ها قرار دارد، وm تعداد هاگینه‌های یک خم هموار از درجهٔ $2k$ است که درون یک تعداد فرد از هاگینه‌ها قرار دارد با این شرط که تعداد کُلّ هاگینه‌ها به تعداد ماکسیمال برسد. این تعداد ماکسیمال برابر است با $g + 1$ که g گونهٔ خم است و همان‌طور که هارناک [۵] نشان داده، $g = (n-1)(n-2)/2$. خمهای درجهٔn با $g + 1$ هاگینه به ازای تمامnها وجود دارند و پتروفسکی آنها را M-خم (M حرف اول کلمهٔ ماکسیمال) نامیده است.

گودکوف تمام پیکربندیهای ۱۱ هاگینهٔ M- خمهای درجهٔ ۶ را یافته است (نگاه کنید به شکل ۱)

$p = 10, m = 1$ $p = 6, m = 5$ $p = 2, m = 9$

شکل۱ یازده هاگینهٔ M- خمها

همنهشتی گودکوف در مورد تمام M-خمهایی که تا این زمان شناخته شده‌اند صادق بوده است. اما هیچ‌گونه رابطه‌ای بین پیکربندیِ هاگینه‌ها در صفحهٔ تصویری و نظریهٔ اعداد مشاهده نمی‌شد. من می‌دانستم که طبق تحقیقات روخلین و میلنر، در توپولوژی خمینه‌های مشتقپذیر ۴ بعدی، همنهشتیهای با پیمانهٔ ۱۶ نقش قاطعی دارند، همانند نقش همنهشتیهای با پیمانهٔ ۸ در نظریهٔ صورتهای درجهٔ دوم (که من این را از کتاب بسیار خوب حساب نوشتهٔ سر (Serre) یاد گرفته بودم)، بنابراین، بلافاصله شروع کردم به جستجوی یک خمینهٔ ۴ بعدی. نخست مکمل یک خم مختلط در صفحهٔ تصویری مختلط و تصویر آن در فضای خارج‌قسمت $S^4 = \mathbf{CP}^2/\mathrm{conj}$ که در آن، conj مزدوج‌سازی مختلط است، به ذهنم آمد. پس از چند هفته

شروع به مطالعهٔ فضاهای پوششی کردم (از مقالات روخلین، اتیا، بوت و سینگر، که در آن زمان تازه بودند، الهام گرفتم). در آن ماه ژانویه، در مسکو سرمای شدیدی بود، و شوفاژ (که در انحصار دولت و مرکزی بود) خراب شده بود (همان‌طور که بعدها نیز چند بار اتفاق افتاد، و احتمالاً در آتیهٔ نزدیک باز هم اتفاق خواهد افتاد.) دست من دیگر قادر به نگه‌داشتن مداد نبود، فقط می‌توانستم در حال اسکی کردن در جنگلهای اطراف مسکو کار کنم. چند روز بعد فهمیدم راهی را که به‌سوی اثبات حدس گودکوف منتهی می‌شود، لمی که نمی‌توانم اثبات کنم، سد کرده است (آن لم را می‌توان در [۱] یافت). در آن زمان یک دانشجوی درخشان بسیار جوان‌به‌نام وارچنکو داشتم که از هر مانعی بدون توقف عبور می‌کرد. من این مسأله را [هم] در بین مسائل دیگر برای او مطرح کردم. کمتر از یک هفته پس از آن تاریخ به من گفت که لِم را اثبات کرده است. دیگر مانعی وجود نداشت و من بدون واهمه به کارم ادامه دادم و اثبات را در زمان کوتاهی به پایان رساندم.

هوا گرمتر شد، و شوفاژ را تعمیر کردند. در نتیجه توانستم اثباتها را بنویسم و از این راه درستی آنها را تحقیق کنم. همه چیز بر وفق مراد بود بجز آن لِم، چون اثبات وارچنکو غلط بود. من دیگر نمی‌توانستم عقب‌نشینی کنم، می‌بایست مانع را از سر راه برمی‌داشتم. این امر را با چند روز کار سخت انجام دادم، و بدین ترتیب حدس گودکوف با پیمانهٔ ۴ را اثبات کردم.

بدون اثبات نادرست وارچنکو هرگز نمی‌توانستم به نتیجهٔ نهایی برسم زیرا گمان من این بود که آن لِم درست است، وگرنه جرئت این را نداشتم که از یک لم اثبات نشده نتیجه‌های لازم را استنتاج کنم. و بدون این نتایج هم هرگز نمی‌توانستم بر مشکلات تکنیکی اثبات آن لم فائق آیم. بنابراین منبع اصلی نتیجهٔ نهایی، یک اشتباه بود! مهمترین نتیجهٔ تمام اینها خود حدس گودکوف نبود بلکه کشف روابط غیر منتظره بین هندسهٔ جبری خمهای حقیقی، توپولوژی خمینه‌های ۴ بعدی و حساب صورتهای درجهٔ دوم بود. از آن زمان به‌بعد، این نظریه خیلی سریع رشد کرد. وقتی آن را برای روخلین شرح دادم، او تقریباً بلافاصله اثبات حدس گودکوف با پیمانهٔ ۸ را به اتمام رساند. جدیدترین پیشرفتهای این نظریه را خارلاموف (۱۹۸۷)، ویرو (۱۹۸۳)، خوانسکی (۱۹۸۳)، نیکولین (۱۹۸۶) و شوستین (۱۹۹۰) به کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان ارائه کرده‌اند. متأسفانه توصیفی کلی از این نظریه به‌صورت کتاب منتشر نشده است (مع‌هذا می‌توان مقالهٔ [۶] و حواشی خارلاموف را بر مجموعه آثار پتروفسکی به زبان روسی مطالعه کرد).

در سال ۱۹۷۹ نوشتم [۶] که از ۲۶۸۲۸۲۸۵۵ درختی که پیکربندی ۲۲ هاگینه را توصیف می‌کند، حداقل ۱۰ تا و حداکثر ۱۴۴ تا توسط M- خمهای درجهٔ ۸ قابل تحقق‌اند. این اعداد امروزه ۷۸ و ۹۱ هستند، اما تمام پیکربندیهای ممکن M- خمهای درجهٔ ۸ هنوز پیدا نشده‌اند.

ایدهٔ اصلی [۱] این بود که مختلطی شدهٔ مفهوم خمینهٔ لبه‌دار $f(x,y) \geq 0$ عبارت‌است از مفهوم پوشش دو لایه‌ای (مضاعف) انشعاب‌دار $f(x,y) = z^2$. برای من هنوز این سؤال مطرح است که «مختلطی شدهٔ» مفاهیم توپولوژیکی که از مفهوم لبه و همچنین از مفهوم هومولوژی و کوبوردیسم مشتق می‌شوند چیست. این برنامه فقط برای کوبوردیسمهای لاگرانژی و لژاندری در هندسه‌های همتافته (symplectique) و سایشی (contact) تحقق یافته است.

• شما شاگردان زیادی داشته و دارید، و کلاً ریاضیدانان بسیاری از ایده‌های شما تأثیر پذیرفته‌اند، ممکن است بگویید تحصیلات خود شما چگونه بوده است و استادان شما چه کسانی بوده‌اند؟

آرنولد: من در خانواده‌ام، ریاضیدان نسل چهارم هستم. پدرم زمانی فوت کرد که من ۱۱ سال داشتم، و خانهٔ ما پر از کتابهای ریاضی بود. مانند بیشتر ریاضیدانان روسی، بین ۱۴ و ۱۷ سالگی در المپیادهای ریاضی شرکت کردم و تا حدی هم موفق بودم (معمولاً دوّم می‌شدم). هفته‌ای یک شب در دانشگاه، «کروژوک» (محفل، گروه‌کاری) داشتیم؛ در این جلسات دانشجویان برای دانش‌آموزان دبیرستان سؤال مطرح می‌کردند. هر دانش‌آموزی می‌بایست جوابهای مسائلی را که در طّی هفتهٔ قبل حل کرده بود بازگو کند. در آنجا من بیشتر از تمام سالهای دانشگاه ریاضیات یاد گرفتم یعنی هنر درست استدلال کردن، رفت و آمد متناوب بین استقرا (مثال، مثال نقیض) و استنتاج (حدس، لِم) را آموختم. مکتب ریاضی روسیه به این سنّت بسیار وابسته بود. به دانشگاه که وارد شدیم در سطح یک محقق بودیم، البته شاید بدون معلومات زیاد (که آن را «بیفایده» و حتّیٰ «خطرناک» می‌دانستند و مقید به آن نبودند) اما کاملاً آماده برای بالا رفتن از صخره‌هایی بودیم که شاید مشکلتر از صخره‌هایی بودند که در کوههای مرتفع ریاضیات جدی به آن برمی‌خوریم.

من در سال ۱۹۵۴ وارد دانشگاه مسکو شدم، در آن زمان چند سالی بود که از شدت تبعیضات کاسته شده بود. یک «کروژوک» برای دانشجویان سال اول در مورد توابع حقیقی به سرپرستی ویتوشکین تشکیل شده بود. می‌بایست تمام این نظریه را بدون آنکه اصلاً چیزی بخوانیم، از طریق اثبات یک سری قضیه‌هایی که درست انتخاب شده بودند کشف کنیم. این شیوه بسیار عالی بود گواینکه بسیار هم مشکل بود. به یاد می‌آورم که کیریلوف و وینبرگ جزو شرکت‌کنندگان بودند. وجود روحیهٔ رقابت صادقانه (نمی‌بایست از کتاب استفاده می‌کردیم) مشخصهٔ این شیوه بود که تا حدودی هم گروه‌گرایی را تشویق می‌کرد. در آخر سال می‌رسیدیم به نظریهٔ وردشهای توابع چند متغیره (امروزه می‌گوییم هندسهٔ انتگرال، خمینهٔ گراسمان، و رده‌های مشخصه).

درس جبر را دینکین ارائه می‌کرد. من تعجّب می‌کردم که ریاضیدانی چنان شایسته بتواند آنقدر بد درس بدهد. بعدها فهمیدم که جبردانها این کار را عمداً انجام می‌دهند تا علم خود را اسرارآمیزتر و هنر بردن جملات از راست به چپ را با اهمیت‌تر جلوه دهند. درس پُر بود از تعاریف بدون انگیزهٔ مشخص. مثلاً می‌بایست دترمینانها را یاد بگیریم بدون اینکه بفهمیم اینها حجم متوازی‌السطوحها هستند. گروهها در آخر به‌عنوان مجموعه‌هایی ظاهر می‌شدند که دو عمل بر روی آنها تعریف شده بود که در چند اصل موضوع، که می‌بایست آنها را حفظ کنیم، صدق می‌کردند. وقتی کتابهای جبر خطّی شیلوف و گلفاند را خواندیم نفس راحتی کشیدیم (در این کتابها مثلاً به‌جای تمام اصل موضوعهای فضای اقلیدسی تنها این مطلب آمده بود که در هندسهٔ ابتدایی، هر قضیه‌ای که بتوان آن‌را برحسب سه بردار بیان کرد درست است).

در آن زمان آموزش رسمی ریاضیات در مسکو بسیار متأثر از بور باکی بود. درس دینکین باز از همه بهتر بود. درس آنالیز در سطح برشهای ددکیند ارائه می‌شد در حالی که در درس فیزیک تجربی از آنالیز برداری استفاده می‌کردیم (با اثباتهایی غلط از قضیهٔ استوکس). خوشبختانه اجازه داشتیم در کلاس درس حاضر نشویم به‌شرط اینکه در امتحانات موفق شویم. اولین مقاله‌ام را زمانی نوشتم که خود را برای امتحان جبر سال اول آماده می‌کردم. دینکین مسأله‌ای را در مورد روش اشتورم پیشنهاد کرد، که عبارت بود از به‌دست آوردن فرمولی برای تعداد ریشه‌های یک چندجمله‌ای در ناحیه‌ای محصور در یک خم‌گویا مسأله را دو دانشجو، کیریلف و خودمن، با دو روش مختلف حل کردند. ظاهراً استاد ما فکر می‌کرد که راه حل را ریاضیدان پخته‌تری در اختیار ما گذاشته است. ما از پسِ همهٔ آزمونهایِ علنی این مفتّش بدگمان برآمدیم و او فهمید که اشتباه می‌کرده است. از نظر اخلاقی، برای ما که مکتب ویتوشکین را گذرانده بودیم، کاملاً غیر ممکن بود راه حلی

ارائه کنیم که خودمان آن را ابداع نکرده باشیم.

دینکین از ما خواست مقاله‌ای بنویسیم. این مقاله را ۶ یا ۷ بار نوشتیم و هر بار رد می‌شد تا اینکه بالاخره به‌صورت قابل قبولی درآمد و تصمیم گرفتیم آن را برای یک مجله بفرستیم. اما در همان زمان من در خانه یک کتاب قدیمی کوشی را پیدا کردم که اساساً همان نتایج را دربرداشت. آن مقاله هرگز چاپ نشد.

یک مسابقهٔ دیگر هم برای دانشجویان دو سال اول وجود داشت. ده دوازده مسأله را به دیوار زده بودند. یک سری مسائل را به‌خاطر می‌آورم که به رده‌بندی ایده‌آلهای بستهٔ جبر توابع پیوسته منتهی می‌شد. این احساس را داشتیم که باید این نظریه را به تنهایی بیافرینیم. یک مسألهٔ دیگر این بود که آن‌چیزی را که امروز به آن مجموعهٔ ماندلبروت می‌گویند (و من نمی‌دانم چرا) ترسیم کنیم و این تنها مسأله‌ای بود که حل نکردیم. در سال ۱۹۵۵ کامپیوتر در اختیار نداشتیم.

در اوایل دومین سال تحصیل من در دانشگاه، کولموگورف برگزاری سمیناری را دربارهٔ نظریهٔ تقریب‌زدن توابع برای دانشجویان همدورهٔ ما شروع کرد. او چند مسألهٔ ابتدایی را مطرح ساخت (در عین حال هدف او، آن‌طور که اکنون می‌فهمم، مسألهٔ سیزدهم هیلبرت در مورد نمایش توابع سه متغیرهٔ حقیقی از طریق برهمنهش توابع دو متغیره بود). سپس برای چند ماه به فرانسه رفت.

در همان زمان، دینکین سمینار بسیار جالب توجهی ترتیب داد که بهترین دانشجویان را جذب کرد. من سبک جالب او را در تدریس به یاد می‌آورم: قضیه‌ای روی تخته سیاه می‌نویسند. پنج دقیقه قبل از آن لمی ثابت شده است. دانشجویی که دینکین انتخاب کرده پای تخته ایستاده است. او باید آن قضیه را اثبات کند. ولی نمی‌تواند. بنابراین دینکین شروع می‌کند به کمک کردن. او یک داستان تعریف می‌کند، که داستان یک میمون است. «چند موز به سقف آویزان کرده‌اند و دو چوبدستی هم وجود دارد. باید موزها را پایین آورد. هیچ‌یک از این دو چوبدستی برای این منظور کفایت نمی‌کند. اما می‌توان با آن دو چوبدستی یک چوبدستی بلندتر ساخت. میمونهای باهوشی هستند که در دو دقیقه این‌کار را انجام می‌دهند. برای میمونهایی که باهوش نیستند زمان بسیار طولانیتری لازم است». بالاخره از دانشجو می‌پرسد آیا حاضری؟ در سمینار هیچ‌کس به این گفته نخندید. بعدها فهمیدم که او این سبک را اختراع نکرده است. او از گلفاند و گلفاند هم از لاندائو تقلید می‌کرد. تعداد زیادی از ریاضیدانان مسکو این دوره را گذرانده‌اند. اما، یادم می‌آید که در آنجا یک سخنرانی عالی شنیدم که یک نوع مباحثه بود دربارهٔ مکانیک سماوی توسط آلکسیف.

وقتی کولموگورف از پاریس بازگشت به او گفتم که با آن مسائل چه کرده‌ام، و او از من دعوت کرد با او کار کنم. من سمینار دینکین را ترک کردم و راحت شدم. کولموگوروف احترام بسیار زیادی داشت. او به تمام علوم علاقه‌مند بود و در تمام زمینه‌های ریاضی، به‌استثنای هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد، کار می‌کرد. به‌مدت تقریباً بیست‌سال عملاً با ریاضیدانان خارجی تماسی نداشت. او در سال ۱۹۶۳ به من گفت که اکتشافاتش در توپولوژی (به‌خصوص چهار یادداشت او در کنت دانندوی پاریس دربارهٔ هومولوژی) مورد توجه جامعهٔ ریاضی قرار نگرفته است. او به من گفت: «از گروههای کوهمولوژیی که من همزمان با آلکساندر (با تعمیم دادن مفاهیم فیزیک) معرفی کرده‌ام استفاده می‌شود اما در مقالاتم یک ساختار حلقه نیز معرفی کرده‌ام و فکر می‌کنم با استفاده از این ساختار بسیار مهم می‌توان کشفیات زیادی انجام داد، اما توپولوژیدانان از آن استفاده نمی‌کنند». این اظهار نظر کولموگوروف جو ریاضیات در مسکو را نشان می‌دهد که از دنیای خارج منزوی بود. این امر (همان‌طور که روخلین به‌من توضیح داد) عظمت کولموگوروف را نیز نشان می‌دهد که قادر بود اهمیت کشفیات خود را به‌تمامی حدس بزند.

در سال ۱۹۵۶، کولموگوروف بیشتر روی مسائل نظریهٔ اطلاعات کار می‌کرد. مسألهٔ برهمنهشها به مطالعات او مربوط می‌شد. او برای نابرابری ویتوشکین یک اثبات بسیار ساده پیدا کرد: اگر هر تابع p بار مشتق‌پذیر n متغیره برهمنهشی ازتوابع q بار مشتق‌پذیر m متغیره باشد، آنگاه

$$n/p \leq m/q$$

به‌خصوص تعداد واحدهای اطلاعاتی لازم برای کُد گذاری یک تابع p بار مشتق‌پذیر n متغیره، با تقریب ε، مانند $(\frac{1}{\varepsilon})^{n/p}$ افزایش می‌یابد.

وضعیت در مورد توابع مشتق‌ناپذیر متفاوت است. کولموگورف توابع پیوستهٔ چهار متغیرهٔ حقیقی را به‌صورت برهمنهشی از توابع پیوستهٔ سه متغیرهٔ حقیقی نمایش داده است. او همچنین ثابت کرده است که برای اینکه توابع پیوستهٔ سه متغیره را به توابع دو متغیره تبدیل کنیم، کافی است درخت کلّی را طوری در $\mathbf{R}^3$ بنشانیم که هر تابع پیوسته روی درخت را بتوان به‌صورت مجموع سه تابع پیوسته که هر یک فقط به یک مختص بستگی دارد نمایش داد.

من یک چنین نشانده‌ای را ساختم و این اولین کار جدّی من بود. خود کولموگوروف بلافاصله متن یادداشت مرا تهیه کرد و به داکلادی فرستاد و بعداً از آن بسیار تعریف کرد. به‌گمان من کولموگوروف حق داشت، زیرا همیشه باید جوانان را تشویق کرد. یک هفته بعد کولموگوروف توانست توابع پیوستهٔ n متغیرهٔ حقیقی را به برهمنهشی از توابع پیوستهٔ یک متغیره به‌علاوهٔ یک تابع دو متغیره تجزیه کند. او بعدها می‌گفت که این نتیجه از تمام نتایجی که به‌دست آورده مشکلتر بوده است، و او هرگز نتوانسته است روی یک موضوع بیش از دو هفته کار طاقت‌فرسا انجام دهد. از اینکه اثبات من توانسته بود در او انگیزه‌ای ایجاد کند بر خود می‌بالم: او قضیهٔ خود را از طریق ساده کردن ساخته‌های من پیدا کرد.[۱]

از آن زمان به بعد رفتار کولموگوروف با من بیشتر همانند رفتار با یک ریاضیدان مستقل بود تا یک شاگرد. او مرا آزاد گذارد تا هر کار ریاضی را که دلم می‌خواهد انجام دهم. من تصمیم گرفتم که تحقیقاتم را در زمینهٔ نمایش توابع بر روی خمها به‌صورت مجموعی از توابع مختصات، انجام دهم. مسأله برای درختها حل شد. بنابراین من خمهای مسطح بسته، مانند بیضیها را انتخاب کردم. مسألهٔ دیریکله برای معادلهٔ هذلولی به یک سیستم دینامیکی بر روی خم بستگی دارد. این سیستم برای بیضی عبارت است از یک چرخش دایره. برای خمهای نزدیک به بیضی به تمام مشکلات تشدیدها و بخشیابهای کوچک که در مکانیک سماوی هم وجود دارد برمی‌خوریم. من بلافاصله در مورد دیفئومورفیسمهای تمام‌ریخت دایره دو حدس زدم. اما نتوانستم آنها را ثابت کنم. حدس اول را بیست سال بعد میشل هرمان اثبات کرد و در مورد حدس دوم، یوکوز (Yoccoz) وپرزمارکو (Perez-Marco) اخیراً ثابت کرده‌اند که این حدس برای تقریباً همهٔ اعداد چرخشی صحیح است اما برای همهٔ آنها صحیح نیست.

چون نتوانستم حدسهایم را ثابت کنم، یک مدل ساده شده، یعنی

---

۱. ترجمهٔ انگلیسی مقالات کولموگوروف در این باره همراه با حواشی آرنولد و خود کولموگوروف، در مجلدات آثار کولموگوروف که به تازگی در سری "Mathematics and its applications" توسط انتشارات Kluwer منتشر شده، آمده است.

دیفئومورفیسم موضعی را بررسی کردم. من مسأله را در این حالت با استفاده از روشی از نوع روش نیوتن که کولموگوروف در سال ۱۹۵۴ ابداع کرده بود حل کردم (بعدها ملگرانژ (Malgrange) به من نشان داد که هانری کارتان ده سال پیش، از این روش در تحقیقاتش بر روی آنچه که بعدها نظریهٔ بافه‌های سازگار نامیده شد استفاده کرده است). سپس من مقالات زیگل را کشف کردم که در زمان جنگ، آن مسألهٔ ساده شده را بررسی کرده بود. کولموگوروف که آن مقالات را ندیده بود گفت: «همراهان خوبی داریم».

این منشأ اولین کار من (۱۹۵۸) دربارهٔ نظریه‌ای است که بعدها فیزیکدانان آن را نظریهٔ "کام" (کولموگوروف ـ آرنولد ـ موزر) نامیدند.

به مسألهٔ سیزدهم هیلبرت برگردیم. هنوز نمی‌دانیم که آیا می‌توان هر تابع جبری با سه متغیر مختلط را به‌صورت شاخه‌های یک برهمنهش توابع جبری دو متغیره نمایش داد یا نه. حدس من همیشه این بوده است که این کار، حتی برای تابع $f(x,y,z)$ که هیلبرت پیشنهاد کرده بود:

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

امکانپذیر نیست و نیز حتی اگر به‌جای توابع جبری دو متغیره، نگاشتهای چند حرفی را قرار دهیم که از نظر توپولوژیک معادل توابع جبری هستند، باز هم امکانپذیر نیست.

این حدس بعدها مرا به گروههای تافته‌ها، هندسهٔ توابع مبین و نظریهٔ تکینه‌ها کشاند. اخیراً اسمیل و واسیلیف، نتایجی را که من در زمینهٔ بافته‌ها به‌دست آورده‌ام در نظریهٔ پیچیدگی الگوریتمی به کار گرفته‌اند. واسیلیف به این نتیجه رسیده است که پیچیدگی توپولوژیک محاسبهٔ تقریبی ریشهٔ یک چند جمله‌ای از درجهٔ n دربازهٔ بین n و $n - c\log n$ قرار دارد[۷].

●فرانسویها عموماً بر این عقیده‌اند که در ریاضیات یك سبك روسی وجود دارد، نظر شما چیست؟

آرنولد: من فکر می‌کنم که سبک هیچین (Hitchin) و بنکن (Bennequin) بیشتر روسی است تا سبک سوسلین و فدورچوک (پروفسوری که جانشین آلکساندروف در کرسی توپولوژی در دانشگاه مسکو شد؛ کرسیهای دانشگاه مسکو عملاً مادام‌العمر هستند). مقالات روسیِ «دربارهٔ یکی از خواصِ یکی از جوابهایِ یکی از معادلاتِ دیفرانسیل بامشتقات جزئی» به همان اندازه ملال آورند که نظایر آنها در کنت راندو. به‌نظر من آنچه که سبک روسی نامیده می‌شود در واقع سبک ریاضیدانانی است که ریاضی را یک کُلّ لایتجزا می‌دانند و به‌خصوص درصددند بین شاخه‌هایی از ریاضیات و علوم که بسیار دور از هم‌اند رابطه‌هایی پیدا کنند. می‌توانم از نویکف، سینایی، مانین، فادیف، ورشیک، کیریلوف، فوخس نام ببرم. استادهای ما مانند کولموگوروف، پتروفسکی، پونتریاگین، و گلفاند علائق گوناگونی در ریاضیات داشتند. به‌نظر من سبک روسی بیشتر وارث سبک کلاین و پوانکاره است تا سبک هیلبرت و بورباکی.

●شما چند ماهی را در اورسه [فرانسه] گذرانده‌اید، حاصل مشاهداتتان چیست؟

آرنولد: بوویل، ایلوزی، بیسموت، دوآدی و تمام (Temam) از من به گرمی استقبال کردند ولی پست الکترونیک خراب بود. دو روز قبل از اینکه عازم اورسه شوم در مسکو دو ساعت برای خرید نان به انتظار ایستادم. وقتی بالاخره نان را به من دادند فقط برای دو نفر دیگر از کسانی که در صف ایستاده بودند نان باقی مانده بود. من خیلی خوشحال شدم. از این نوع خوشحالیها در فرانسه وجود ندارد.

ریاضیات در اورسه، مانند ۲۶ سال قبل که یک سال را در پاریس گذراندم، کاملاً بسته و محدود است. عنوان سمینارها از قبیل «پایان اثبات خاصیت P» برایم چندان معنایی نداشت. دوست داشتم هر هفته در سمینارهایی از نوع «سمینار بورباکی» شرکت کنم اما متأسفانه فقط یک سمینار از این نوع برگزار شد. از دیدار مجدد توم، سالیون، گروموف، روئل و برژه در مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES) بسیار بسیار خوشحال شدم.

کتابخانهٔ اورسه بسیار عالی است. این اولین کتابخانه‌ای بود که در آن دیدم مجموعهٔ کتابهای دائرةالمعارف علوم ریاضی ـ ظاهراً در نتیجهٔ مساعی سیکوراف ـ در یک طبقه کنار یکدیگر چیده شده‌اند نه اینکه به طور پراکنده و بر طبق اسامی مؤلفین قرار داده شده باشند (مانند کتابخانهٔ کنگرهٔ آمریکا و در نتیجه، تمام کتابخانه‌های ایالات متحدهٔ آمریکا).

خجالت می‌کشم این را بگویم، اما ریاضیاتی که اخیراً در فرانسه آموخته‌ام و بیشتر مورد علاقهٔ من بوده است، متعلق به ریاضیدانان غیر فرانسوی، از قبیل شینتانی (Shintani) ژاپنی، کرونهایمِ انگلیسی، زوگراف و کنتسویچِ روسی، و فریدمنِ آمریکایی بوده است.

●به تازگی در مقالهٔ کوتاهی [۸] که اکنون مشهور شده است[1] گفته‌اید که فرهنگ دانشجویان روسی در حال افت است و عللی هم برای آن ذکر کرده‌اید، آیا در آنجا هم مانند فرانسه، تعداد دانشجویان خوبی که رشته‌های علمی را انتخاب می‌کنند (به نفع رشته‌هایی مانند حقوق، مدیریت، و علوم اقتصادی) کاهش یافته است؟

آرنولد: بله این هم هست، اما نباید مانع از این بشود که آنهایی که رشته‌های علمی را انتخاب می‌کنند از آموزش خوبی برخوردار شوند، البته روی هم رفته دانشجویان خیلی خوبی داریم. این افت در دانشگاههای «سطح بالای» مسکو کمتر بچشم می‌خورد تا در سایر دانشگاهها.

●چند سال پیش در یك مصاحبهٔ دیگر از روابط بد حاکم بین دانشوران شوروی و دانشوران غرب شکایت داشتید و می‌گفتید که غربیها به‌اندازه کافی از شورویها نام نمی‌برند، اکنون که دانشمندان یکدیگر را آسانتر ملاقات می‌کنند، آیا آن وضعیت تغییر یافته است؟

آرنولد: روابط شخصی دانشمندان عالی است، اما مثلاً در اورسه، هیچکس (ازکسانی که با آنها صحبت کردم) متوجه پیدا شدن پاسخ منفی برای مسألهٔ بیست و یکم هیلبرت (دربارهٔ تحقق یافتن گروههای مونودرومی توسط سیستمهای فوخسی) که چند سال پیش توسط آ. بولیبروخ (Bolibroukh) در مسکو منتشر شد نشده است. نوع تبلیغاتیِ آمریکایی آن هم که توسط آنوسوف منتشر شد فایده‌ای نداشت.

استنباط من این است که اکنون چون دیگر کسی از روسها ترسی ندارد سهم آنها کاملاً نادیده گرفته خواهد شد. درکتابی که اخیراً در پاریس چاپ شده است تخمینهای کلاسیک اعداد بتیِ واریته‌های جبری را که واقعاً مبنای اثبات اولیهٔ نابرابری ویتوشکین هم هست و به پتروفسکی و اولینک (Oleinik) تعلق دارد، (۱۹۴۹، ۱۹۵۱، [۹])، به توم و میلنر (۱۹۶۴ـ۱۹۶۵) نسبت داده‌اند. یکی از مؤلفان آن کتاب به من گفت که تاریخچهٔ این مسأله را می‌دانسته؛ البته او به ریاضیدانان روسی که با آنها برخورد کرده، ارجاع داده است.

●دربارهٔ اثرهای تغییرات سیاسی و اقتصادی بر روی علوم در اتحاد جماهیر

---

۱. ترجمهٔ خلاصهٔ این مقاله در بخش مسائل در شمارهٔ ۳ی سال ۴ نشر ریاضی چاپ شده است.

شوروی و بر روی آکادمی علوم و دانشگاههای مستقل چه می‌گویید؟

آرنولد: از وضعیت کنونی آکادمی علوم اطلاع ندارم. احتمالاً آکادمی نخواهد توانست مخارج مأموریتهای خارج را بپردازد و تعداد زیادی از آنها باید حذف شود. به نظر می‌آید که از سال ۱۹۹۲ کتابخانه‌ها دیگر نه کتابی و نه مقاله‌ای از غرب دریافت نخواهند کرد. حتی برای پرداختهای سال ۱۹۹۱ هم پول کافی وجود ندارد.

کمیتهٔ حزب کمونیست استادان را منحل کرده‌اند. به‌جای آن برای نمایندهٔ محلّی یک مؤسسهٔ مهم، که نام کنونی آن را نمی‌دانم، یک کرسی به‌وجود آورده‌اند. این شخص از زمان برژنف مسؤل انتخاب استادان برای سفر به خارج بوده است.

گروهی از علاقه‌مندان (کنستانتینوف، پولیوانف و دیگران) یک دانشگاه مستقل در مسکو تأسیس کرده‌اند که دو دانشکده دارد، دانشکدهٔ ریاضی و دانشکدهٔ فیزیک نظری، و دانشجویان آن همسطح دانشجویان اکول نرمال سوپریور (دانشسرایعالی) پاریس هستند. در میان استادها ریاضیدانان سرشناسی مانند کیریلوف، روداکوف، و ایلیاشنکو وجود دارند. این دانشگاه باشکلات عظیمی روبه‌روست. مانع اصلی خدمت سربازی است. مسألهٔ تأمین هزینه‌ها نیز وجود دارد.

●اثر فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی بر علوم چیست؟

آرنولد: حکومتهای ملّی گرا و فاشیست [جمهوریها] برعلیه دانشجویان، محققین و استادهایی که «از نژاد خارجی» هستند، مانند روسها، تبعیض قائل خواهند شد. امیدوارم که مکتب ریاضی خارکوف در اوکراین که یکی از مهمترین مکتبهای [ریاضی] اتحاد جماهیر شوروی سابق است، جان سالم به‌در ببرد. به‌نظر می‌آید که فاجعهٔ اقتصادی خطرناکتر باشد.

●ما ناظر فرار واقعی مغزها از اتحاد جماهیر شوروی به کشورهای غربی و اسرائیل هستیم، در این باره چه فکر می‌کنید چگونه می‌توان آن را جبران کرد؟

آرنولد: یا یک دیکتاتوری او نوع پُل پت و یا فرار مغزها به‌سوی آمریکای لاتین! امروز کمونیستهایی که در برنامه‌های ریاضی فعال هستند از من برای دانشگاههای غربی توصیه‌نامه می‌خواهند، مانند موشهای کشتی که از سرنشینان مطلعترند و می‌خواهند از کشتی در حال غرق فرار کنند.

چندین سال بود که حقوق یک استاد دانشگاه در حدود ۲۰ دلار در ماه بود. گفته‌اند که قیمتها در اوایل سال ۱۹۹۲ تقریباً پنج برابر می‌شود. بنابراین حقوقها در واقع بر پنج تقسیم خواهند شد. شنیده‌ام که دولت پول قابل تبدیلی را که ناشران غربی به مؤلفان روسی پرداخته‌اند توقیف کرده است (به‌علت ورشکستگی). نمی‌دانم این‌طور هست یا نه، اگر این حرف درست باشد فرار مغزها افزایش خواهد یافت زیرا این پول کمک عمده‌ای به ریاضیدانان فعّال بود.

●آینده را چگونه می‌بینید؟

آرنولد: اگر آمارهایی که در مسکو منتشر شده است درست باشد، عمر متوسط در اتحاد جماهیر شوروی در چند دههٔ گذشته ده سال کاهش یافته است. یک محاسبهٔ سرانگشتی نشان می‌دهد تعداد افرادی که سالیانه از دست رفته‌اند معادل است با اعدام فوری ۸۰ میلیون از سکنهٔ شوروی (لم: اگر کسی تیرباران شود تقریباً نصف زندگی خود را از دست می‌دهد). این از همهٔ جنایات کمونیستها بزرگتر است، تلفات جنگ فقط در حدود ۳۰ میلیون نفر بوده است. به‌زودی مسأله‌ای که لنین در سال ۱۹۱۸ در مورد کاهش دادن تعداد نان‌خورها مطرح کرد حل خواهد شد.

عجیب است که فاجعهٔ انقلاب بلشویکی، شکوفایی ریاضیات را به‌دنبال داشت. ممکن است معجزه‌ای مشابه، پس از یک جنگ داخلی اتمی و یا پس از وقوع ماجرایی شبیه به آنچه درکویت اتفاق افتاد، رُخ دهد. بنابراین من در مورد آیندهٔ مکتب ریاضی روسیه کاملاً خوشبین هستم. شخصاً امیدوارم که برای کشورم مفید باشم و از مهاجرت اجتناب کنم، چون سن من اکنون نزدیک به میانگین طول عمر است.

مراجع

1. V. I. Arnold. - *Arrangements of ovals of real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional smooth manifolds and arithmetic of integer-valued quadratic forms*, Funkt. Anal. and Appl. 5:3 (1971), 1-9.
2. I. G. Petrovsky.-*Sur la topologie des courbes réelles et algébriques*, Cr. Ac. Sc. Paris, **197** (1933), 1270-73.
3. I. G. Petrovsky, O. A. Oleinik. *Topology of real algebraic surfaces*, Izv. AN SSSR, ser, mathem., **13** (1949), 389-402.
4. D. A. Goudkov, G. A. Utkin. *Topology of sixth-order curves and fourth order surfaces*, Uch. Zap. Gork. un-ta, **87** (1969), 3-213.
5. A. Harnack.-*Über Vieheiligkeit der Ebenen Algebraishen Kurven*, Math. Ann. **10** (1891), 1-61.
6. V. I. Arnold, O. A. Oleinik.-*Topology of real algebraic manifolds*, Vestnik Mosk. Univ. Matem. **34**:6 (1979) 7-17 (traduit par Allerton Press comme Moscow University Mathematics Bulletin).
7. V. A. Vasilev.-*Cohomology of braid groups and complexity of algorithms*, Funkt. Anal. and Appl. **22**:3 (1988), 182-190.
8. V. I. Arnold.-*Matematicheskii Trivium*, Uspekhi Mat. Nauk, **46** (1991), traduction française dans ce numéro de la Gazette.
9. O. A. Oleinik.-*Bounds for Bettinumbers of real algebraic hypersurfaces*, Math. Sbornik **28** (1951), 635-640.